

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D, F
tisdagen den 7 januari 2014, klockan 14.00–19.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsiA ht13 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

1a) (1p) Vad anger termen **valens** (eng. degree) i samband med grafer?

b) (1p) Vad menas med en **hamiltoncykel** i en graf $G = (V, E)$?

c) (1p) Formulera **Halls sats** om matchning i bipartita grafer.

2a) (1p) Vad menas med att $p \in \mathbb{Z}$ är ett **primtal**?

b) (1p) Hur kan man (enklare än med definitionen) se om x är **inverterbart** i $\mathbb{Z}_m$?

c) (1p) Hur definieras för godtyckliga mängder A, B att $|A| = |B|$?

3a) (1p) Formulera **binomialsatsen** (eng. binomial theorem).

b) (1p) Vad menas med att en binär relation $\mathcal{R}$ är **reflexiv**?

c) (1p) Formulera **principen om inklusion och exklusion** (eng. sieve principle) för tre mängder A, B, C .

4a) (1p) Hur definieras att $\pi \in S_n$ är en **jämn** permutation?

b) (1p) Vad menas med att permutationerna $\alpha, \beta \in S_n$ är **konjugerade**?

c) (1p) Hur många $\pi \in S_6$ har cykelstrukturen (typen) $[123]$?

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht13 ger automatiskt full poäng på uppgift $4 + i$ ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

5) (3p) En sammanhängande (enkel, dvs inga öglor, inga multipla kanter) graf är ritad på ytan av en sfär, utan korsande kanter. I hur många ytor delar den in sfärens yta om antalet hörn (eng. vertices) är 5 mer än antalet ytor och antalet kanter (eng. edges) är 5 mer än antalet hörn?

Vänd!

6) (3p) Finn alla heltal x, y sådana att

$$186x + 69y = 3.$$

7) (3p) På hur många sätt kan 12 olika böcker och 6 identiska pennor fördelas bland 20 personer om varje person kan få högst en bok, men ett godtyckligt antal av pennorna?

Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av

$$\pi(1)=3, \pi(2)=1, \pi(3)=8, \pi(4)=7, \pi(5)=4, \pi(6)=6, \pi(7)=5, \pi(8)=2.$$

a) (1p) Skriv π i cykelnotation.

b) (1p) Ange, med motivering, om π är en jämn eller en udda permutation.

c) (1p) Finn ett $\tau \in S_8$ med $\pi\tau = \tau\sigma$, där (i cykelnotation) $\sigma = (1\ 6\ 4)(2\ 8\ 3\ 7)$.

DEL P2

9) (4p) $G = (V, E)$ är en (enkel, dvs inga öglor, inga multipla kanter) graf sådan att varje komponent i G innehåller högst en cykel.

Finn $|V|$, antalet hörn (eng. vertices), och $|E|$, antalet kanter (eng. edges), i grafen, om precis 18 av G 's komponenter saknar cykel och medelvärde av hörnens valenser (eng. degrees) är $\frac{78}{41}$.

10a) (2p) Vilka cykelstrukturer (typer) är möjliga för udda permutationer i S_{10} (alla permutationer av $\{1, 2, \dots, 10\}$) som har ordning 12 (dvs $\pi^{12} = id$ och $\pi^k \neq id$ för $1 \leq k \leq 11$. Cykelstrukturen anges som $[k_1^{\alpha_1} \dots k_m^{\alpha_m}]$ då π har α_i cykler av längd k_i , $k_1 < \dots < k_m$.)

b) (2p) Hur många udda permutationer av ordning 12 finns det totalt i S_{10} ?

11) Beräkna följande potenser i $\mathbb{Z}_{1547}$ ($1547 = 7 \cdot 13 \cdot 17$)

a) (1p) 55^{1153} .

b) (1p) 12^{50} .

c) (2p) 26^{224} .

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) Låt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ och $B = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ vara disjunkta mängder (dvs $A \cap B = \emptyset$) med $|A| = r \geq 1$, $|B| = s \geq 1$. Låt vidare q_n beteckna antalet ord i alfabetet $A \cup B$ vilka har längd n och ett udda antal förekomster av element från A .

a) (3p) Visa att

$$q_n = (s - r)q_{n-1} + r(r + s)^{n-1} \text{ för } n = 1, 2, \dots \quad \text{och } q_0 = 0.$$

b) (2p) Bestäm q_n för $n = 0, 1, 2, \dots$

(Resultatet i a) får användas i b), även om man inte löst a).)

13) (5p) Minns Eulers ϕ -funktion, definierad för $n \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ av

$$\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n, \text{sgd}(x, n) = 1\}|.$$

Visa att om p är ett primtal och $2p + 1$ inte är ett primtal finns inget heltal x med $\phi(x) = 2p$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.