

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TEN1 (OBS!) i kursen
SF1631, DISKRET MATEMATIK för D3 m.fl.
tisdagen den 7 januari 2014, klockan 14.00–19.00.

DENNA SKRIVNING KAN BARA SKRIVAS AV DEM SOM
FÖRSTAGÅNGSREGISTRERADES PÅ KURS SF1631
LÄSÅRET 2011–12 (eller betydligt tidigare)!

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2013, högst 12p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

17–19 p ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) Då $G = (V, E)$ är en (enkel, dvs inga öglor, inga multipla kanter) graf låter vi som vanligt **komplementgrafen** $\overline{G}$ till G vara $\overline{G} = (V, E^c)$, dvs en graf med samma hörn (eng. vertices) som G , där $x, y \in V$ är grannar i $\overline{G}$ precis om de inte är grannar i G .

Visa att om G är isomorf med $\overline{G}$ är $|V| \equiv 0$ eller $1 \pmod{4}$.

Tips: betrakta summan av valenserna (eng. degrees) i G och i $\overline{G}$.

2) (4p) Finn alla heltal x, y sådana att

$$186x + 69y = 3.$$

3a) (3p) På hur många sätt kan 12 olika böcker och 6 identiska pennor fördelas bland 20 personer om varje person kan få högst en bok, men ett godtyckligt antal av pennorna?

b) (1p) I hur många av fördelningarna i a) får minst en person både en bok och minst en penna?

Svaren får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) (4p) Låt G vara en grupp och $a, b, c \in G$ uppfylla $abc = b^{-1}$.

Visa att $cba = b^{-1}$.

5) (4p) Låt $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1$ och $g(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x + 4$ och finn den moniska (dvs med högstagradscoefficienten 1) största gemensamma delaren (eng. greatest common divisor) till $f(x)$ och $g(x)$ i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Vänd!

DEL II

6) (5p) $G = (V, E)$ är en (enkel, dvs inga öglor, inga multipla kanter) graf sådan att varje komponent i G innehåller högst en cykel.

Finn $|V|$, antalet hörn (eng. vertices), och $|E|$, antalet kanter (eng. edges), i grafen, om precis 18 av G 's komponenter saknar cykel och medelvärde av hörnens valenser (eng. degrees) är $\frac{78}{41}$.

7) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av

$$\pi(1)=3, \pi(2)=1, \pi(3)=8, \pi(4)=7, \pi(5)=4, \pi(6)=6, \pi(7)=5, \pi(8)=2.$$

a) (1p) Skriv π i cykelnotation.

b) (1p) Ange, med motivering, om π är en jämn eller en udda permutation.

c) (1p) Finn ett $\tau \in S_8$ med $\pi\tau = \tau\sigma$, där (i cykelnotation) $\sigma = (1\ 6\ 4)(2\ 8\ 3\ 7)$.

d) (2p) Finn antalet olika τ som är korrekta svar till uppgift c).

8) Beräkna följande potenser i $\mathbb{Z}_{1547}$ ($1547 = 7 \cdot 13 \cdot 17$)

a) (1p) 55^{1153} .

b) (2p) 12^{50} .

c) (2p) 26^{224} .

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) En kub skall smyckas med en enfärgad kula i varje hörn.

Av estetiska skäl skall det totala antalet kulor som är röda eller blå vara fyra, medan de övriga fyra kulorna kan ha vilka som helst av k st andra färger.

På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider kuben i rummet) kan utsmyckningen göras?

10a) (1p) Visa att polynomet $f(x) = x^3 + x + 1$ är irreducibelt i $\mathbb{Z}_2[x]$.

b) (1p) Låt F vara den ändliga kropp som konstrueras med hjälp av $f(x)$ (ofta betecknad $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$) och kalla det element i F som svarar mot polynomet x (dvs ekvivalensklassen som innehåller x) för α .

Beräkna $\alpha^3, \alpha^4, \dots$ uttryckta i $1, \alpha$ och α^2 .

c) (4p) Faktorisera polynomet $g(t) = t^3 + t + 1 \in F[t]$ i irreducibla faktorer. Uttryck koefficienterna i faktorerna med $1, \alpha$ och α^2 .

(g är alltså "samma" polynom som f , men vid faktoriseringen tillåts koefficienter i F . Namnet på "variabeln" har bytts från x till t för att undvika sammanblandning.)

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.