

Lösningar tenta TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D3

20 augusti 2014

Tryckfel kan förekomma.

- 1a) (1p) En graf är reguljär omm alla dess hörn har samma valens (dvs lika många grannar).
 b) (1p) En graf är ett träd omm den är sammanhängande och saknar cykler.
 c) (1p) För en plan sammanhängande graf gäller $v - e + r = 2$, där v är antalet hörn i grafen, e antalet kanter i den och r antalet ytor den delar in planet i.

- 2a) (1p) Sådana x, y finns omm $\text{sgd}(m, n) \mid c$.
 b) (1p) $f : A \rightarrow B$ är en injektion omm för varje $b \in B$ finns **högst ett** $a \in A$ med $f(a) = b$.
 c) (1p) A är överuppräknelig omm det varken finns en bijektion $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ för något $n \in \mathbb{N}$ eller en bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Exempel är $\mathbb{R}$ och $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- 3a) (1p) Antalet injektioner $f : A \rightarrow B$ är $n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ då $|A| = m$, $|B| = n$.
 b) (1p) En binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är transitiv omm $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$ medför att $x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$.
 c) (1p) $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n, \text{sgd}(x, n) = 1\}|$.

- 4a) (1p) $\pi = (1642)(37) \in S_8$ är **jämn**, ty den har ett jämnt antal cykler av jämn längd.
 b) (1p) $\pi, \sigma \in S_n$ är konjugerade omm det finns $\alpha \in S_n$ med $\alpha\pi\alpha^{-1} = \sigma$.
 c) (1p) π och σ är konjugerade omm de har samma cykelstruktur, dvs för varje $i = 1, 2, \dots$ har π och σ samma antal cykler av längd i .

- 5) (3p) Vi skall avgöra om det måste finnas en fullständig matchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ där X -hörnens valenser alla är olika och ≥ 1 .

Lösning:

Låt $A \subseteq X$ (och, som vanligt, $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$). Alla A :s hörn har olika valens, så det finns $x \in A$ med valens $\geq |A|$ (om $A \neq \emptyset$). Alla x :s grannar tillhör $J(A)$, så $|J(A)| \geq |A|$. (Om $A = \emptyset$ är $|J(A)| = 0 = |A|$). Enligt Halls sats har G en fullständig matchning.

Svar: Ja, det måste finnas en fullständig matchning i G .

(Alternativt kan man matcha X -hörnerna i ordning efter växande valens.)

- 6) (3p) Vi skall avgöra om $155 \in \mathbb{Z}_{228}$ är inverterbart och i så fall finna dess invers.

Lösning:

Euklides algoritm:

$$\left\{ \begin{array}{l} 228 = 1 \cdot 155 + 73, \\ 155 = 2 \cdot 73 + 9, \\ 73 = 8 \cdot 9 + 1 \end{array} \right. \quad \text{så } \text{sgd}(228, 155) = 1 \text{ och } \left\{ \begin{array}{l} 1 = 73 - 8 \cdot 9 = 73 - 8(155 - 2 \cdot 73) = \\ = -8 \cdot 155 + 17 \cdot 73 = \\ = -8 \cdot 155 + 17(228 - 155) = \\ = 17 \cdot 228 - 25 \cdot 155 \end{array} \right.$$

155 är alltså inverterbart i $\mathbb{Z}_{228}$ och inversen är $-25 = 228 - 25 = 203 \in \mathbb{Z}_{228}$.

Svar: 155 är inverterbart och $155^{-1} = 203$ i $\mathbb{Z}_{228}$.

- 7) (3p) Vi söker antalet sätt att ordna 10 (olika) färgade kulor och 50 (identiska) svarta kulor, då varje färgad kula har två svarta grannar och ingen svart kula två färgade grannar.

Lösning:

Vi kan låta varje färgad kula "växa ihop" med sina svarta grannar (villkoret på de svarta ger ju att ingen är granne till två olika färgade) och sedan välja platser för de uppkomna 10 storkulorna bland 40 platser, vilket kan ske på $(40)_{10} = \frac{40!}{30!}$ sätt (injektioner från en 10-mängd till en 40-mängd) (på övriga platser hamnar kvarvarande 30 svarta kulor).

Svar: Antalet sådana sätt att ordna kulorna är $\frac{40!}{30!} (= 3\,075\,990\,524\,006\,400)$.

8) $\pi \in S_8$ ges av $\pi(1)=7, \pi(2)=4, \pi(3)=1, \pi(4)=8, \pi(5)=6, \pi(6)=5, \pi(7)=3, \pi(8)=2$. Vi skall (a, 1p) skriva π i cykelnotation, (b, 1p) ge $\pi^{-1}\tau$ då τ är $(182)(365)(47)$ och (c, 1p) avgöra om $\sigma^3\pi^{-2}\tau\sigma^{-1}\tau$ är jämn eller udda då $\sigma \in S_8$.

Lösning:

- a. $\pi(1) = 7, \pi(7) = 3, \pi(3) = 1, \pi(2) = 4, \pi(4) = 8, \dots$ ger att $\pi = (173)(248)(56)$.
 b. $\pi^{-1}\tau = (137)(284)(56)(182)(365)(47) = \dots = (14)(2357)$ ($1 \mapsto 8 \mapsto 4, 4 \mapsto 7 \mapsto 1$ etc.).
 c. $\text{sgn}(\sigma^3\pi^{-2}\tau\sigma^{-1}\tau) = \text{sgn}(\sigma)^3 \text{sgn}(\pi)^{-2} \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma)^{-1} \text{sgn}(\tau) = 1$, ty alla $\text{sgn}(\cdot)$ är ± 1 . Permutationen är alltså jämn.

Svar a: $\pi = (173)(248)(56)$, b: $\pi^{-1}\tau = (14)(2357)$, c: Den är jämn.

9) (4p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $19 \mid (13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12)$.

Lösning:

Eftersom 19 är ett primtal ger Fermats lilla sats att $x^{19} \equiv_{19} x$ för alla $x \in \mathbb{Z}$. Det ger, fortfarande för alla $x \in \mathbb{Z}$, att $13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12 \equiv_{19} 13x^3 + 14x^3 + 11x^3 - 12 \equiv_{19} 38x^3 - 12 \equiv_{19} 0 \cdot x^3 + 7 \equiv_{19} 7 \not\equiv_{19} 0$, så det finns inga sådana x .

Svar: Det finns inga sådana x .

10a) $a, m, x \in \mathbb{Z}$. Vi skall avgöra (a, 2p) om $ax \equiv_m 1$ medför att det finns $y \in \mathbb{Z}$ med $my \equiv_a 2$ och (b, 2p) om $ax \equiv_m 2$ medför att det måste finnas $y \in \mathbb{Z}$ med $my \equiv_a 1$.

Lösning:

- a. $ax \equiv_m 1$ betyder att $ax - 1 = km$ för ett $k \in \mathbb{Z}$, så $m(-2k) - 2 = (-2x)a$ och $y = -2k$ ger $my \equiv_a 2$. Svaret blir alltså ja i a.
 b. Motexempel: $a = m = 2, x = 1$. De ger ju $ax = 2 \equiv_2 2$, men $my = 2y \not\equiv_2 1$ för alla $y \in \mathbb{Z}$, så svar nej i b. (Sök a med $ax = 2$ i $\mathbb{Z}_m$, m inte inverterbart i $\mathbb{Z}_a$, dvs a inte inverterbart i $\mathbb{Z}_m$)

Svar a: Ja, b: Nej.

11) (4p) $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$. Vi skall visa att för de kromatiska polynomen gäller $P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$ då $\lambda \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Låt $G' = (V, E_1 \cup E_2)$ (dvs G med alla kanter mellan hörn i både V_1 och V_2 borttagna, så G' består av delarna G_1 och G_2 , utan kanter mellan). Då är färgningar av delarna G_1 och G_2 oberoende, så $P_{G'}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$ då $\lambda \in \mathbb{N}$ (för varje färgning av G_1 finns $P_{G_2}(\lambda)$ färgningar av G_2). Men färgningarna av G utgör en delmängd av dem av G' , så $P_G(\lambda) \leq P_{G'}(\lambda)$ och **saken är klar**.

12) $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ kallas multiplikativ om $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ då $m, n \in \mathbb{Z}_+$ och $\text{sgd}(m, n) = 1$. Vi skall visa (a, 1p) att Möbius funktion $\mu(n)$ är multiplikativ, (b, 2p) att $g(n) = \sum_{d \in \mathbb{Z}_+, d|n} \mu(d)f(d)$ är multiplikativ om f är det och (c, 2p) bestämma $g(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})$ (p_i :na olika primtal, alla $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$).

Lösning:

a. Om $\text{sgd}(m, n) = 1$ och mn innehåller någon primfaktor i kvadrat, gör minst en av m och n också det, så $\mu(mn) = 0 = \mu(m) \cdot \mu(n)$. Om mn är en produkt av olika primtal är m, n också det. Om m, n då har r respektive s primfaktorer ($r, s \in \mathbb{N}$) har mn $r + s$ stycken och $\mu(mn) = (-1)^{r+s} = (-1)^r (-1)^s = \mu(m) \cdot \mu(n)$ och **a-saken är klar**.

b. Om $\text{sgd}(m, n) = 1$ är $g(mn) = \sum_{d|mn} \mu(d)f(d) = \sum_{d_1|m, d_2|n} \mu(d_1d_2)f(d_1d_2) = \sum_{d_1|m, d_2|n} \mu(d_1)\mu(d_2)f(d_1)f(d_2) = \sum_{d_1|m} \mu(d_1)f(d_1) \cdot \sum_{d_2|n} \mu(d_2)f(d_2) = g(m) \cdot g(n)$ (alla summor över **positiva** delare) och **b-saken är klar**.

c. Eftersom g är multiplikativ är $g(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1^{\alpha_1}) \dots g(p_k^{\alpha_k})$. För p ett primtal (och $\alpha \in \mathbb{Z}_+$) får vi $g(p^\alpha) = \mu(1)f(1) + \mu(p)f(p) + \mu(p^2)f(p^2) + \dots + \mu(p^\alpha)f(p^\alpha) = 1 \cdot f(1) + (-1) \cdot f(p) + 0 = f(1) - f(p)$. Det ger svaret.

Svar: a, b visade ovan, c: $g(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = (f(1) - f(p_1)) \dots (f(1) - f(p_k))$.

13) (5p) $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$, $b \leq a$, $c \leq a$, $a < b + c$. Vi söker antalet $f : X \rightarrow Y \times Z$ med
i) f injektiv, *ii)* f :s projektioner på Y och Z surjektiva, *iii)* f :s projektioner växande,
då $X = [a]$, $Y = [b]$, $Z = [c]$ ($[k] = \{1, 2, \dots, k\}$).

Lösning:

Låt $f(x) = (g(x), h(x))$. Enligt *ii)*, *iii)* är $g : X \rightarrow Y$ och $h : X \rightarrow Z$ surjektiva växande.
 g beskrivs entydigt av för vilka $x \in \{2, 3, \dots, a\}$ g inte antar ett nytt värde, dvs $g(x) = g(x-1)$. Eftersom g antar alla värden $1, 2, \dots, b$ finns det $(a-1) - (b-1) = a-b$ sådana x . Totalt kan alltså g väljas på $\binom{a-1}{a-b} = \frac{(a-1)!}{(a-b)!(b-1)!}$ sätt.

För varje val av g beskrivs h på samma sätt av mängden av $x \in \{2, 3, \dots, a\}$ där $h(x) = h(x-1)$, de är $a-c$ stycken som ovan. Men *i)* ger att de tillåtna sådana x är precis de där $g(x) \neq g(x-1)$, så det finns $(a-1) - (a-b) = b-1$ att välja bland. För givet g är alltså antalet möjliga h precis $\binom{b-1}{a-c} = \frac{(b-1)!}{(a-c)!(b+c-a-1)!}$.

Det sökta antalet olika f av den givna typen är enligt multiplikationsprincipen

$$\frac{(a-1)!}{(a-b)!(b-1)!} \cdot \frac{(b-1)!}{(a-c)!(b+c-a-1)!} = \frac{(a-1)!}{(a-b)!(a-c)!(b+c-a-1)!}.$$

(Svaret är som sig bör symmetriskt i b och c . Om t.ex. $a = b = c$ finns bara en möjlighet, $g(x) = h(x) = x$.)

Svar: Antalet sådana funktioner är $\frac{(a-1)!}{(a-b)!(a-c)!(b+c-a-1)!}$.
