

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D (m.fl.)
onsdagen den 20 augusti 2014, klockan 14.00–19.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Maximal poäng på de olika delarna är T: 12p, P1: 12p, P2: 12p, P3: 10p.

För **godkänt** krävs minst 9p på var och en av delarna T och P1.

För betyg A–E krävs **dels** godkänt och **dels** poäng enligt:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs totalt	37	32	-	25	-	poäng
varav	-	12	8	-	-	på delarna P2 och P3 tillsammans
och	5	-	-	-	-	på del P3

Omdömet FX, dvs rätt att komplettera för betyg E, ges för skrivning som inte är godkänd, men nått minst 18p totalt.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL T

Godkänd uppgift 1 på lsiA ht13 ger automatiskt full poäng på uppgift i ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

- 1a) (1p) Vad menas med att en graf är **reguljär** (eng. regular)?
- b) (1p) Vad menas med att en graf är ett **träd**?
- c) (1p) Formulera **Eulers polyederformel** för en plan sammanhängande graf. Förklara införda beteckningar.
- 2a) (1p) För vilka $m, n, c \in \mathbb{Z}$ finns $x, y \in \mathbb{Z}$ med $mx + ny = c$?
- b) (1p) Vad menas med att funktionen $f : A \rightarrow B$ är en **injektion**?
- c) (1p) Vad menas med att mängden A är **överuppräknelig** (eng. uncountable)?
- 3a) (1p) Ange antalet **injektioner** $f : A \rightarrow B$ då $|A| = m$, $|B| = n$ ($m, n \in \mathbb{N}$).
- b) (1p) Vad menas med att en binär relation $\mathcal{R}$ är **transitiv**?
- c) (1p) Hur definieras $\phi(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+$? (ϕ är Eulers ϕ -funktion.)
- 4a) (1p) Är (cykelform) $\pi = (1\ 6\ 4\ 2)(3\ 7) \in S_8$ **jämn** eller **udda**? Motivera.
- b) (1p) Hur definieras att två permutationer $\pi, \sigma \in S_n$ är **konjugerade**?
- c) (1p) Hur avgör man lätt om $\pi, \sigma \in S_n$ (givna på cykelform) är konjugerade?

DEL P1

Godkänd uppgift 2 på lsiA ht13 ger automatiskt full poäng på uppgift $4 + i$ ($i = 1, 2, 3$) och det ger då ingen ytterligare poäng att lösa den uppgiften på skrivningen.

- 5) (3p) Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf (där, förstås, $X \cap Y = \emptyset$ och $|e \cap X| = |e \cap Y| = 1$ för alla $e \in E$), sådan att alla X -hörners valenser är olika och ≥ 1 . Måste det finnas en fullständig matchning i G ?

Visa eller ge motexempel.

Vänd!

6) (3p) Avgör om $155 \in \mathbb{Z}_{228}$ är inverterbart och finn i så fall dess invers.
(Dvs, ange ett element i $\mathbb{Z}_{228} = \{0, 1, \dots, 227\}$ som är invers till 155, eller visa att inget finns.)

7) (3p) Man har 10 (olika) färgade kulor och 50 (identiska) svarta kulor.
På hur många olika sätt kan de sextio kulorna ordnas så att varje färgad kula har två svarta grannar och ingen svart kula har två färgade grannar?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)
(Ordningar där två svarta kulor bytt plats räknas som samma. En kulas grannar är kulorna omedelbart före och efter den. Första och sista kulan har bara en granne var.)

8) Permutationen $\pi \in S_8$ ges av

$$\pi(1)=7, \pi(2)=4, \pi(3)=1, \pi(4)=8, \pi(5)=6, \pi(6)=5, \pi(7)=3, \pi(8)=2.$$

a) (1p) Skriv π i cykelnotation.

b) (1p) $\tau \in S_8$ ges (i cykelnotation) av $(1\ 8\ 2)(3\ 6\ 5)(4\ 7)$. Ange $\pi^{-1}\tau$ (i cykelnotation).

c) (1p) För $\sigma \in S_8$, är $\sigma^3\pi^{-2}\tau\sigma^{-1}\tau$ en jämn eller udda permutation? Motivera.

DEL P2

9) (4p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $19 \mid (13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12)$, dvs
 $13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 \equiv 12 \pmod{19}$.

10) Låt $a, m, x \in \mathbb{Z}$. Besvara följande, motivera svaren.

a) (2p) Om $ax \equiv 1 \pmod{m}$, måste det finnas $y \in \mathbb{Z}$ med $my \equiv 2 \pmod{a}$?

b) (2p) Om $ax \equiv 2 \pmod{m}$, måste det finnas $y \in \mathbb{Z}$ med $my \equiv 1 \pmod{a}$?

11) (4p) Låt G, G_1, G_2 vara grafer, där $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$,
 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$ ($i = 1, 2$).

Om $P_G(\lambda)$, $P_{G_i}(\lambda)$ är G :s och G_i :s kromatiska polynom (dvs, för $\lambda \in \mathbb{N}$, antalet hörnfärgningar av G, G_i med högst λ färger), visa att för $\lambda \in \mathbb{N}$ gäller

$$P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda).$$

DEL P3

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

12) Kalla en funktion $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ **multiplikativ** om

$$f(mn) = f(m) \cdot f(n) \text{ för alla } m, n \in \mathbb{Z}_+ \text{ med } \text{sgd}(m, n) = 1.$$

a) (1p) Visa att Möbius funktion $\mu(n)$ är multiplikativ.

b) (2p) Visa att om $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ är multiplikativ är $g: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ också det, där

$$g(n) = \sum_{d \in \mathbb{Z}_+, d|n} \mu(d)f(d).$$

c) (2p) Bestäm $g(n)$ (uttryckt i f) då $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ (för p_i :na olika primtal, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$).
(Resultaten i tidigare deluppgifter får användas, även om man inte löst dem.)

13) (5p) Låt $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ och $b \leq a$, $c \leq a$, $a < b + c$.

Då $X = [a]$, $Y = [b]$, $Z = [c]$ (där, för $k \in \mathbb{Z}_+$, $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$), hur många funktioner $f: X \rightarrow Y \times Z$ uppfyller följande tre villkor?

i) f är **injektiv**,

ii) **projektionerna** av f på Y och Z är **surjektiva**,

dvs för varje $y \in Y$ finns $x \in X$ med $f(x) = (y, z')$ (för något $z' \in Z$) och motsvarande för $z \in Z$,

iii) f :s projektioner är **växande**,

dvs om $f(x_1) = (y_1, z_1)$, $f(x_2) = (y_2, z_2)$ och $x_1 < x_2$ är $y_1 \leq y_2$, $z_1 \leq z_2$.

Lycka till! Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.