

**Lösningar tentan TEN1 SF1631(/SF1630) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.,
20 augusti 2014**

Tryckfel kan förekomma.

1) (4p) Vi skall avgöra om det måste finnas en fullständig matchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ där X -hörnens valenser alla är olika och ≥ 1 .

Lösning: Låt $A \subseteq X$ (och, som vanligt, $J(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E \text{ för något } x \in A\}$). Alla A :s hörn har olika valens, så det finns $x \in A$ med valens $\geq |A|$ (om $A \neq \emptyset$). Alla x :s grannar tillhör $J(A)$, så $|J(A)| \geq |A|$. (Om $A = \emptyset$ är $|J(A)| = 0 = |A|$). Enligt Halls sats har G en fullständig matchning.

Svar: Ja, det måste finnas en fullständig matchning i G .

(Alternativt kan man matcha X -hörnen i ordning efter växande valens.)

2) (4p) Vi skall avgöra om $155 \in \mathbb{Z}_{228}$ är inverterbart och i så fall finna dess invers.

Lösning: Euklides algoritm:

$$\begin{cases} 228 = 1 \cdot 155 + 73, \\ 155 = 2 \cdot 73 + 9, \\ 73 = 8 \cdot 9 + 1 \end{cases} \quad \text{så } \text{sgd}(228, 155) = 1 \text{ och } \begin{cases} 1 = 73 - 8 \cdot 9 = 73 - 8(155 - 2 \cdot 73) = \\ = -8 \cdot 155 + 17 \cdot 73 = \\ = -8 \cdot 155 + 17(228 - 155) = \\ = 17 \cdot 228 - 25 \cdot 155 \end{cases}$$

155 är alltså inverterbart i $\mathbb{Z}_{228}$ och inversen är $-25 = 228 - 25 = 203 \in \mathbb{Z}_{228}$.

Svar: 155 är inverterbart och $155^{-1} = 203$ i $\mathbb{Z}_{228}$.

3) (4p) Vi söker antalet sätt att ordna 10 (olika) färgade kulor och 50 (identiska) svarta kulor, då varje färgad kula har två svarta grannar och ingen svart kula två färgade grannar.

Lösning: Vi kan låta varje färgad kula "växa ihop" med sina svarta grannar (villkoret på de svarta ger ju att ingen är granne till två olika färgade) och sedan välja platser för de uppkomna 10 storkulorna bland 40 platser, vilket kan ske på $(40)_{10} = \frac{40!}{30!}$ sätt (injektioner från en 10-mängd till en 40-mängd) (på övriga platser hamnar kvarvarande 30 svarta kulor).

Svar: Antalet sådana sätt att ordna kulorna är $\frac{40!}{30!} (= 3\,075\,990\,524\,006\,400)$.

4) (4p) Vi söker x då $ax^2 = b$ och $x^5 = c$, där $a, b, c, x \in G$, en grupp.

Lösning: T.ex. $ac = ax^5 = ax^2x^3 = bx^3$, så $b^{-1}ac = x^3$ och $ab^{-1}ac = ax^3 = ax^2x = bx$, så

Svar: $x = b^{-1}ab^{-1}ac$.

5) (4p) Vi skall faktorisera polynomet $f(x) = x^4 + x^3 + x + 4$ i irreducibla faktorer i $\mathbb{Z}_5[x]$.

Lösning: Vi undersöker först om (det är så lyckligt att) $f(x)$ har någon förstgradsfaktor, dvs om det har något nollställe i $\mathbb{Z}_5$. Vi finner $f(0) = 4$, $f(1) = 1 + 1 + 1 + 4 = 2$, $f(2) = 1 + 3 + 2 + 4 = 0$, så $f(x)$ har enligt faktorsatsen en faktor $x - 2 = x + 3$. Polynomdivision ger $f(x) = (x+3)(x^3+3x^2+x+3) = (x+3)g(x)$. $x+3$ är irreducibelt. Om $g(x)$ är reducibelt har det en förstgradsfaktor. $g(0), g(1) \neq 0$ (ty $f(0), f(1) \neq 0$), $g(2) = 3 + 2 + 2 + 3 = 0$, så $g(x)$ har en faktor $x + 3$. Polynomdivision ger $g(x) = (x+3)(x^2+1) = (x+3)h(x)$. $h(0), h(1) \neq 0$ och $h(2) = 4 + 1 = 0$, så $h(x)$ har en faktor $x + 3$. Polynomdivision ger $h(x) = (x+3)(x+2)$, med irreducibla faktorer.

Svar: $f(x) = (x + 2)(x + 3)^3$, där faktorerna är irreducibla.

6) (5p) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $19 \mid (13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12)$.

Lösning: Eftersom 19 är ett primtal ger Fermats lilla sats att $x^{19} \equiv_{19} x$ för alla $x \in \mathbb{Z}$. Det ger, fortfarande för alla $x \in \mathbb{Z}$, att $13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12 \equiv_{19} 13x^3 + 14x^3 + 11x^3 - 12 \equiv_{19} 38x^3 - 12 \equiv_{19} 0 \cdot x^3 + 7 \equiv_{19} 7 \not\equiv_{19} 0$, så det finns inga sådana x .

Svar: Det finns inga sådana x .

7) Vi skall (a, 1p) finna alla element i U_{21} (de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{21}$) och (b, 4p) avgöra om gruppen $(U_{21}, \cdot)$ är cyklisk.

Lösning: a. $x \in U_{21}$ om $x \in \mathbb{Z}_{21}$ och $\text{sgd}(x, 21) = 1$, så $U_{21} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$.
b. Eftersom $\mathbb{Z}_{21} \approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ är $U_{21} \approx U_3 \times U_7$. Alla $y \in U_3$ och alla $z \in U_7$ uppfyller $y^6 = 1, z^6 = 1$. Det ger att $x^6 = 1$ för alla $x \in U_{21}$, så $(U_{21}, \cdot)$ är inte cyklisk.

(Man kan förstås också beräkna ordningarna för elementen i U_{21} . Eftersom ordningen måste vara en delare till 12 ($= |U_{21}|$) har $x \in U_{21}$ ordning 12 (dvs genererar gruppen) om $x^4 \neq 1, x^6 \neq 1$. Använd också $x^{4,6} = (-x)^{4,6}$.)

Svar a: $U_{21} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$, **b:** $(U_{21}, \cdot)$ är inte cyklisk.

8) (5p) $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$. Vi skall visa att för de kromatiska polynomen gäller $P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$ då $\lambda \in \mathbb{N}$.

Lösning: Låt $G' = (V, E_1 \cup E_2)$ (dvs G med alla kanter mellan hörn i både V_1 och V_2 borttagna, så G' består av delarna G_1 och G_2 , utan kanter mellan). Då är färgningar av delarna G_1 och G_2 oberoende, så $P_{G'}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)$ då $\lambda \in \mathbb{N}$ (för varje färgning av G_1 finns $P_{G_2}(\lambda)$ färgningar av G_2). Men färgningarna av G utgör en delmängd av dem av G' , så $P_G(\lambda) \leq P_{G'}(\lambda)$ och **saken är klar**.

9) (6p) Vi söker antalet väsentligt olika armband av 5 svarta, 2 röda och 2 vita pärlor uppträdda på en ögla av snöre.

Lösning: Vi använder Burnsides lemma. Om armbandet placeras med pärlorna i hörnen av en reguljär 9-hörning, ser man att gruppen G som verkar på mängden av konfigurationer består av identitetsavbildningen id , elementen $r, r^2, \dots, r^8$ (där r är rotation $\frac{2\pi}{9}$ kring en axel genom 9-hörningens mittpunkt och vinkelrät mot dess plan) och $s, rs, r^2s, \dots, r^8s$ (där s är rotation kring en axel i 9-hörningens plan, genom dess medelpunkt och en av pärlorna). $|F(g)|$, antalet konfigurationer som inte ändras av g ses vara som i tabellen:

g :s typ	antal sådana g	$ F(g) $
id	1	$\binom{9}{5,2,2} = 756$ alla konfigurationer
$r, r^2, \dots, r^8$	8	0 de två vita kan inte roteras till varandra
$s, rs, \dots, r^8s$	9	$4 \cdot 3 = 12$ 8 pärlor paras ihop 2 och 2, ett par skall vara vitt, ett rött

Så antalet väsentligt olika armband = antalet banor under G :s verkan = $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{18} (1 \cdot 756 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 12) = \frac{1}{18} 864 = 48$.

Svar: Antalet olika sådana armband är 48.

10) (6p) $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$, $b \leq a$, $c \leq a$, $a < b + c$. Vi söker antalet $f : X \rightarrow Y \times Z$ med
i) f injektiv, *ii)* f :s projektioner på Y och Z surjektiva, *iii)* f :s projektioner växande,
då $X = [a]$, $Y = [b]$, $Z = [c]$ ($[k] = \{1, 2, \dots, k\}$).

Lösning: Låt $f(x) = (g(x), h(x))$. Enligt *ii)*, *iii)* är $g : X \rightarrow Y$ och $h : X \rightarrow Z$ surjektiva växande.

g beskrivs entydigt av för vilka $x \in \{2, 3, \dots, a\}$ g inte antar ett nytt värde, dvs $g(x) = g(x-1)$. Eftersom g antar alla värden $1, 2, \dots, b$ finns det $(a-1) - (b-1) = a-b$ sådana x . Totalt kan alltså g väljas på $\binom{a-1}{a-b} = \frac{(a-1)!}{(a-b)!(b-1)!}$ sätt.

För varje val av g beskrivs h på samma sätt av mängden av $x \in \{2, 3, \dots, a\}$ där $h(x) = h(x-1)$, de är $a-c$ stycken som ovan. Men *i)* ger att de tillåtna sådana x är precis de där $g(x) \neq g(x-1)$, så det finns $(a-1) - (a-b) = b-1$ att välja bland. För givet g är alltså antalet möjliga h precis $\binom{b-1}{a-c} = \frac{(b-1)!}{(a-c)!(b+c-a-1)!}$.

Det sökta antalet olika f av den givna typen är enligt multiplikationsprincipen

$$\frac{(a-1)!}{(a-b)!(b-1)!} \cdot \frac{(b-1)!}{(a-c)!(b+c-a-1)!} = \frac{(a-1)!}{(a-b)!(a-c)!(b+c-a-1)!}.$$

(Svaret är som sig bör symmetriskt i b och c . Om t.ex. $a = b = c$ finns bara en möjlighet, $g(x) = h(x) = x$.)

Svar: Antalet sådana funktioner är $\frac{(a-1)!}{(a-b)!(a-c)!(b+c-a-1)!}$.
