

Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen TEN1 (OBS!) i kursen
SF1631(/SF1630), DISKRET MATEMATIK för D (m.fl.)
onsdagen den 20 augusti 2014, klockan 14.00–19.00.

DENNA SKRIVNING KAN BARA SKRIVAS AV DEM SOM
FÖRSTAGÅNGSREGISTRERADES PÅ KURSEN
LÄSÅRET 2011–12 (eller betydligt tidigare)!

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2013, högst 12p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

17–19 p ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf (där, förstås, $X \cap Y = \emptyset$ och $|e \cap X| = |e \cap Y| = 1$ för alla $e \in E$), sådan att alla X -hörnens valenser är olika och ≥ 1 . Måste det finnas en fullständig matchning i G ?
Visa eller ge motexempel.

2) (4p) Avgör om $155 \in \mathbb{Z}_{228}$ är inverterbart och finn i så fall dess invers.
(Dvs, ange ett element i $\mathbb{Z}_{228} = \{0, 1, \dots, 227\}$ som är invers till 155, eller visa att inget finns.)

3a) (4p) Man har 10 (olika) färgade kulor och 50 (identiska) svarta kulor.
På hur många olika sätt kan de sextio kulorna ordnas så att varje färgad kula har två svarta grannar och ingen svart kula har två färgade grannar?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.)
(Ordningar där två svarta kulor bytt plats räknas som samma. En kulas grannar är kulorna omedelbart före och efter den. Första och sista kulan har bara en granne var.)

4) (4p) $ax^2 = b$ och $x^5 = c$, där $a, b, c, x \in G$, en grupp. Uttryck x i a, b, c .

5) (4p) Faktorisera polynomet $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ i irreducibla faktorer,

$$f(x) = x^4 + x^3 + x + 4.$$

Skriv koefficienterna i faktorerna som element i $\mathbb{Z}_5$, dvs utan t.ex. minustecken.

Vänd!

DEL II

6) (5p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $19 \mid (13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 - 12)$, dvs
$$13x^{57} + 14x^{39} + 11x^3 \equiv 12 \pmod{19}.$$

7) Låt $(U_{21}, \cdot)$ vara gruppen av inverterbara element i $(\mathbb{Z}_{21}, \cdot)$.

a) (1p) Ange alla element i U_{21} .

b) (4p) Avgör (med motivering) om $(U_{21}, \cdot)$ är en cyklisk grupp.

8) (5p) Låt G, G_1, G_2 vara grafer, där $G = (V, E)$, $G_i = (V_i, E_i)$,
 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ och $E_i = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V_i\}$ ($i = 1, 2$).

Om $P_G(\lambda)$, $P_{G_i}(\lambda)$ är G :s och G_i :s kromatiska polynom (dvs, för $\lambda \in \mathbb{N}$, antalet hörnfärgningar av G, G_i med högst λ färger), visa att för $\lambda \in \mathbb{N}$ gäller

$$P_G(\lambda) \leq P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda).$$

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) Ett enkelt men smakfullt armband består av 5 svarta, 2 röda och 2 vita pärlor uppträdda på en ögla av snöre.

Hur många väsentligt olika sådana armband finns det?

Pärlorna ser likadana ut från båda håll och armbanden kan vändas och vridas.

10a) (6p) Låt $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ och $b \leq a$, $c \leq a$, $a < b + c$.

Då $X = [a]$, $Y = [b]$, $Z = [c]$ (där, för $k \in \mathbb{Z}_+$, $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$), hur många funktioner $f: X \rightarrow Y \times Z$ uppfyller följande tre villkor?

i) f är **injektiv**,

ii) **projektionerna** av f på Y och Z är **surjektiva**,

dvs för varje $y \in Y$ finns $x \in X$ med $f(x) = (y, z')$ (för något $z' \in Z$) och motsvarande för $z \in Z$,

iii) f :s projektioner är **växande**,

dvs om $f(x_1) = (y_1, z_1)$, $f(x_2) = (y_2, z_2)$ och $x_1 < x_2$ är $y_1 \leq y_2$, $z_1 \leq z_2$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.