

Matematik, KTH
B.Ek

**Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D, F
torsdagen den 18 oktober 2012, klockan 8.00–13.00.**

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 37p. Till den läggs bonus från lappskrivningarna 1A, 2A och 3A ht 2012, högst 6p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E
krävs	32	27	22	18	15

poäng (inklusive bonus)

12–14 poäng ger omdömet Fx och rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (3p) Graferna G_1 och G_2 har grannmatriserna $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Är G_1 och G_2 isomorfa?

Ange en isomorfi eller förklara varför ingen finns.

(Grannmatriserna har 1 i position ij om hörnen (vertices) i och j är grannar (adjacent), 0 annars.)

2) (3p) Finn alla $x, y \in \mathbb{Z}$ som uppfyller

$$51x + 63y = 147.$$

3) (3p) De 38 dagarna semester blev verkligen omväxlande.

Av de 21 dagar då solen visade sig regnade det också 11 dagar, av de 19 dagarna med regn var det också jordskalv 9 dagar och av de 13 dagarna(!) med jordskalv sken också sol 8 dagar.

Hur många dagar förekom antingen alla tre eller ingen av sol, regn och jordskalv?

4) Permutationerna $\pi, \sigma \in S_9$ ges av

$$\pi(1)=\sigma(2)=7, \pi(2)=\sigma(7)=4, \pi(3)=\sigma(8)=8, \pi(4)=\sigma(6)=1, \pi(5)=\sigma(9)=5, \\ \pi(6)=\sigma(1)=3, \pi(7)=\sigma(4)=2, \pi(8)=\sigma(5)=9, \pi(9)=\sigma(3)=6.$$

a) (1p) Skriv π , σ och $\pi\sigma$ på cykelform.

b) (1p) Avgör för var och en av π , σ och $\pi\sigma$ om den är en jämn eller en udda permutation.

c) (1p) Finn $\tau \in S_9$ sådan att $\pi\tau = \sigma$.

5) (3p) En plan, sammanhängande graf delar in planet i 7 ytor, inklusive den obegränsade ytan. Grafen har 1 hörn (vertex) med valens (degree) 1, 6 hörn med valens 2 och 2 hörn med valens 4. Övriga hörn har alla valens 3.

Hur många kanter (edges) har grafen?

Vänd!

DEL II

6) (4p) Finn alla följder $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller

$$\begin{cases} a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 2^{n+3}, & \text{för } n = 0, 1, 2, \dots \\ a_0 = 1, a_1 = 8. \end{cases}$$

7) (4p) Pelle vill fördela de närmaste 100 dagarna mellan studier i diskret matematik, romanläsning och (data)spel, precis en aktivitet varje dag.

Han tänker spela totalt 18 dagar, men aldrig två dagar i rad, och ägna fler dagar (inte lika många) åt den diskreta matematiken än åt romanerna (förstås).

På hur många olika sätt kan han fördela dagarna mellan aktiviteterna?

Svaret får innehålla heltal, fakulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

8) (4p) Vad blir (den minsta icke-negativa) resten då $100^{23\,763}$ divideras med 11 011? [11 011 = $91 \cdot 121$ (ingendera primtal).]

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Var och en av ett (oändligt) antal kulor är märkt med ett positivt heltal, på så sätt att för varje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ finns det precis n st kulor som är märkta med en delare till n (det finns alltså t.ex. precis 6 kulor som är märkta med något av talen 1, 2, 3 och 6).

a) (1p) Hur många kulor är märkta med talet 1?

b) (4p) Hur många kulor är märkta med talet $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$?

Svaret i b) får innehålla n , heltal, fakulteter, potenser, de fyra enkla räknesätten och standardiserade beteckningar för funktioner (av en eller flera variabler) som behandlats i kursen.

10) Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf (dvs X och Y är disjunkta mängder hörn (eng. vertices) och varje kant (eng. edge) innehåller ett hörn i X och ett i Y).

a) (2p) Valenserna (the degrees) $\delta(x) \geq 7$ för alla $x \in X$ och $\delta(y) \leq 7$ för alla $y \in Y$. Visa att det finns en fullständig matchning (dvs en där alla $x \in X$ är matchade) i G .

b) (3p) Nu gäller i stället att $\delta(y) \leq 8$ för alla $y \in Y$, men fortfarande $\delta(x) \geq 7$ för alla $x \in X$, och dessutom att $|X| = 15$. Ge en (god) undre gräns för antalet matchade X -hörn i en maximal matchning.