

Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen TEN1 (OBS!) i kursen
SF1631, DISKRET MATEMATIK för D3 m.fl.
fredagen den 31 maj 2013, klockan 8.00–13.00.

DENNA SKRIVNING SKALL BARA SKRIVAS AV DEM SOM
FÖRSTAGÅNGSREGISTRERADES PÅ KURS SF1631
LÄSÅRET 2011–12!

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2012, högst 12p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

17–19 poäng ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) $G = (V, E)$ är en plan sammanhängande graf. 5 av hörnen har valens 3, 2 har valens 4, ett vardera har valens 5 och 6 och inga andra valenser förekommer. Alla begränsade ytor har precis 3 kanter. Hur många kanter har den obegränsade ytan?

2) (4p) Finn alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till ekvationen

$$165x + 121y = 99.$$

3) (4p) På hur många sätt kan en kortlek (med fyra färger med vardera 13 kort) ordnas, så att korten i var och en av färgerna klöver, ruter och hjärter ligger i rätt ordning inbördes (t.ex. kommer ruter 4 någonstans före ruter 5), medan inga två spaderkort ligger jämte varandra (men deras inbördes ordning är godtycklig)? Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) (4p) Låt G vara en grupp och H en delgrupp till G .

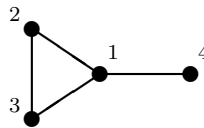
Visa att $K = \{g \in G \mid gH = Hg\}$ är en delgrupp till G och att H är en delgrupp till K . (gH, Hg är sidoklasser till H .)

5) (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $x^2 = x$, dels i $\mathbb{Z}_{341}$ och dels i $\mathbb{Z}_{431}$. [341 = 11 · 31, 431 är primtal.]

Vänd!

DEL II

6) Låt $G = (V, E)$ vara en (enkel, dvs inga öglor, inga multipla kanter) graf och A dess grannmatris (dvs a_{ij} är antalet kanter mellan hörnen i och j).



a) (2p) Finn matrisen A^2 och talet $\text{tr } A^3$ för grafen härintill.

(Om B är en kvadratisk matris betecknar $\text{tr } B$ spåret för B , dvs summan av B :s diagonalelement.)

b) (3p) Vad blir A^2 :s element och $\text{tr } A^3$ för en godtycklig enkel graf?

7a) (2p) Permutationerna $\pi_1, \pi_2 \in S_9$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \dots, 9\}$) ges på tvåradarsform av

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 1 & 7 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

För vilket/vilka (om något) $i = 1, 2$ är π_i konjugerad med $(\pi_i)^2$ (dvs finns σ_i med $\pi_i = \sigma_i(\pi_i)^2\sigma_i^{-1}$)?

b) (3p) Finn ett nödvändigt och tillräckligt villkor på cyklernas längder i $\pi \in S_n$ för att π skall vara konjugerad med π^k ($n, k \in \mathbb{Z}_+$).

8) (5p) Låt $(G, \cdot)$ vara en abelsk grupp och $|G| = n \in \mathbb{Z}_+$.

Låt $m \in \mathbb{Z}_+$ och $\phi(g) = g^m$ för alla $g \in G$.

Visa att $\phi : G \rightarrow G$ är en automorfi för G om $\text{sgd}(n, m) = 1$.

En automorfi för en grupp är en isomorfi av gruppen på sig själv.

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) Låt $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ vara parvis relativt prima (dvs $\text{sgd}(a, b) = \text{sgd}(b, c) = \text{sgd}(c, a) = 1$). Visa att

$$(ab)^{\phi(c)} + (bc)^{\phi(a)} + (ca)^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{abc}.$$

$\phi(x)$ betecknar som vanligt Eulers ϕ -funktion.

10a) (3p) Låt $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Visa att om varje koefficient i produkten $g(x)h(x)$ är delbar med ett primtal p , så är alla koefficienterna i minst en av $g(x)$ och $h(x)$ delbara med p .

b) (3p) Visa att om $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ är reducibel i $\mathbb{Q}[x]$ (dvs om $f(x)$ betraktad som element i $\mathbb{Q}[x]$ är reducibel), så är $f(x)$ reducibel i $\mathbb{Z}[x]$.

Resultatet i a) får användas i b), även om man inte gjort a).

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.