

Lösningar tentan TENA SF1630(/1631) DISKRET MATEMATIK, D(, F)
7 januari 2013

Tryckfel kan förekomma.

1) (3p) Vi skall visa att en graf med 21 hörn och 58 kanter inte kan vara planär.

Lösning: Antag (för att få en motsägelse) att grafen är planär och betrakta en plan ritning av den.

Låt antalet hörn i grafen vara v , antalet kanter e , antalet ytor grafen delar in planet i r (inklusive den omgivande, obegränsade ytan) och antalet komponenter c .

Summan av antalen kanter kring ytorna är $2e$ (varje kant räknas dubbelt) och de summerade antalen är alla ≥ 3 (inga multipla kanter eller öglor), så $2e \geq 3r$, dvs $r \leq \frac{2}{3}e$.

Enligt en känd sats ger det $c+1 = v - e + r \leq v - \frac{1}{3}e = 21 - \frac{58}{3} = \frac{5}{3}$, så $c \leq \frac{2}{3}$. Men eftersom $v \neq 0$ är $c \geq 1$. Antagandet att grafen är planär ledde till motsägelse, så **saken är klar**.

(Alt.: Åberopa direkt olikheten $3v \geq e + 3(c+1)$ för planaritet, i stencilen om planära grafer.)

2) (3p) Vi söker alla lösningar $x \in \mathbb{Z}_{741}$ till ekvationen $51x = 18$.

Lösning: Problemet motsvarar den diofantiska ekvationen $51x - 741k = 18$. Euklides algoritmen ger $741 = 14 \cdot 51 + 27$, $51 = 1 \cdot 27 + 24$, $27 = 1 \cdot 24 + 3$, $24 = 8 \cdot 3$ så **sgd(741, 51) = 3** och $3 = 27 - 1 \cdot 24 = 27 - 1(51 - 1 \cdot 27) = -1 \cdot 51 + 2 \cdot 27 = -51 + 2(741 - 14 \cdot 51) = 2 \cdot 741 - 29 \cdot 51$.

Multiplikation med 6 ger $-174 \cdot 51 + 12 \cdot 741 = 18$, så $\begin{cases} x_0 = -174 \\ k_0 = -12 \end{cases}$ är en lösning till den diofantiska ekvationen.

(x, k) uppfyller då ekvationen precis om $51(x - x_0) - 741(k - k_0) = 0$, dvs (dividera med $\text{sgd}(51, 741) = 3$) $17(x - x_0) = 247(k - k_0)$, där $\text{sgd}(17, 247) = 1$. Så (entydig faktorisering) $x - x_0 = 247q$, för något $q \in \mathbb{Z}$. Varje $q \in \mathbb{Z}$ ger också en lösning ($k - k_0 = 17q$). $0 \leq x < 741$ ger tre värden $x = 73, 320, 567$. **Svar: Alla lösningar i $\mathbb{Z}_{741}$ är $x = 73, 320, 567$.**

3) De 5 första uppgifterna på en skrivning kan ge 0 eller 1 poäng och de övriga 5 kan ge 0, 1 eller 2 poäng. Vi söker (a, 1p) antalet möjliga resultat och (b, 2p) antalet av dem som innehåller alla poäng 0, 1 och 2.

Lösning: Låt X vara mängden möjliga resultat. Multiplikationsprincipen ger $|X| = 2^5 \cdot 3^5 (= 7776)$.

För b) använder vi principen om inklusion och exklusion (sällprincipen).

Låt A_i för $i = 0, 1, 2$ vara mängden resultat utan något "i".

Då är $|A_0| = |A_1| = 1^5 \cdot 2^5$ (bara 1 resp. 0 möjligt för uppgift 1-5), $|A_2| = 2^{10}$ (bara 0 och 1 möjliga för alla uppgifter), $|A_0 \cap A_1| = 0$ (inget möjligt resultat för uppgift 1-5), $|A_0 \cap A_2| = |A_1 \cap A_2| = 1^{10}$ (bara 1 resp. 0 möjligt för alla uppgifter), $|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 0$ (inget möjligt resultat för någon uppgift).

Med X som ovan är det sökta antalet $|X \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2)| = |X| - (|A_0| + |A_1| + |A_2|) + (|A_0 \cap A_1| + |A_0 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|) - |A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 2^5 \cdot 3^5 - (2 \cdot 2^5 + 2^{10}) + (0 + 1 + 1) - 0 = 3^5 \cdot 2^5 - 2^{10} - 2^6 + 2 (= 6690)$

Svar a: $3^5 \cdot 2^5 (= 7776)$, b: $3^5 \cdot 2^5 - 2^{10} - 2^6 + 2 (= 6690)$ möjliga resultat.

4) Permutationerna $\pi, \sigma \in S_8$ ges av

$$\pi(1)=\sigma(8)=7, \pi(2)=\sigma(6)=1, \pi(3)=\sigma(3)=6, \pi(4)=\sigma(5)=3,$$

$$\pi(5)=\sigma(4)=8, \pi(6)=\sigma(2)=4, \pi(7)=\sigma(1)=2, \pi(8)=\sigma(7)=5.$$

Vi söker (a, 1p) π och σ på cykelform, skall (b, 1p) avgöra om $\pi^2 \sigma^3 \pi^{-1} \sigma^8 \pi^4$ är en jämn eller en udda permutation och skall (c, 1p) finna ordningen för $\pi \sigma^{-1}$.

Lösning: $\pi(1) = 7, \pi(7) = 2, \pi(2) = 1$ ger en cykel (1 7 2), $\pi(3) = 6$ osv ger totalt $\pi = (172)(364)(58)$. P.s.s. fås $\sigma = (12487536)$.

π och σ är båda udda (de har ett udda antal (en) cykler av jämn längd). Eftersom $\pi^2 \sigma^3 \pi^{-1} \sigma^8 \pi^4$ är en produkt av ett jämnt antal udda permutationer är den jämn.

$\pi \sigma^{-1} = (172)(364)(58)(16357842) = (14)(275)(38)(6)$, så dess ordning är $\text{mgm}(2, 3, 2, 1) = 6$ (minsta gemensamma multipeln av cykellängderna).

Svar a: $\pi = (172)(364)(58)$, $\sigma = (12487536)$, b: $\pi^2 \sigma^3 \pi^{-1} \sigma^8 \pi^4$ är jämn, c: $\pi \sigma^{-1}$:s ordning är 6.

5) (3p) Studenterna i en kurs är indelade i labgrupper med precis 6 studenter i varje. De sitter sedan 6 vid varje bord. Vi skall visa att det går att välja en student vid varje bord så att de utvalda studenterna tillhör olika labgrupper.

Lösning: Följer av Halls sats för transversaler (borden svarar mot mängderna av de labgrupper som finns representerade vid dem).

Vi visar det också med Halls sats för bipartita grafer.

Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara den bipartita grafen med $X = \{\text{labgrupper}\}$, $Y = \{\text{bord}\}$ och kanter mellan $x \in X$ och $y \in Y$ om $x \cap y \neq \emptyset$. Om $A \subseteq X$ finns $6|A|$ personer i grupperna i A . De får inte alla plats vid färre än $|A|$ bord, så $|J(A)| \geq |A|$ (bokens beteckningar). Enligt Halls sats finns alltså en fullständig matchning i G och för varje kant i den kan vi ta en student, alla från olika bord och olika labgrupper. **Saken är klar.**

6) (4p) Vi söker alla följder $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ som uppfyller $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 9n2^n$, för $n = 2, 3, 4, \dots$ och $a_0 = 3$, $a_1 = 5$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena ekvation är $x^2 = 2x + 3$ med rötter $r_1 = 3$, $r_2 = -1$, så den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $a_n^{\text{hom}} = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$, där A, B är konstanter.

Som partikulärlösning antar vi $a_n = (cn + d)2^n$. Insättning i ekvationen ger $(cn + d)2^n = 2(c(n-1) + d)2^{n-1} + 3(c(n-2) + d)2^{n-2} - 9n \cdot 2^n$, som leder till $c = 12$, $d = 40$, så en $a_n^{\text{part}} = (12n + 40)2^n$.

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså $a_n = a_n^{\text{hom}} + a_n^{\text{part}} = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n + (12n + 40)2^n$. A och B bestäms av att $a_0 = 3 = A + B + 40$, $a_1 = 5 = 3A - B + 104$, vilket ger $A = -34$, $B = -3$ och $a_n = -34 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n + (12n + 40)2^n$.

Svar: Enda lösningen är $a_n = -34 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n + (12n + 40)2^n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

7) (4p) Vi söker antalet $\pi \in S_8$ som uppfyller att $\pi^6(1) \neq 2$.

Lösning: Vi beräknar först antalet $\pi \in S_8$ med $\pi^6(1) = 2$ (och drar bort dem).

$\pi^6(1) = 2$ precis om 1 ingår i en cykel av form $(1\ 2\ \dots)$, $(1\ 2\ \dots)$, $(1\ \dots\ 2)$, $(1\ \dots\ 2\ \dots)$ (cykler av längd 1, 2, 3 eller 6 ger $\pi^6(1) = 1$). Antalen π med sådana cykler är resp. $(6)_2 \cdot 4! = 6!$ (":"-arna i cykeln kan väljas bland 3-8 på $(6)_2 = 6 \cdot 5$ sätt och de övrigas permutation på 4! sätt), $(6)_3 \cdot 3! = 6!$, $(6)_5 \cdot 1! = 6!$, $(6)_6 \cdot 0! = 6!$. Inget π kan innehålla mer än en av dessa cykler, så det totala antalet med $\pi^6(1) = 2$ är $4 \cdot 6!$.

(Alternativt: Antalet π med $\pi^6(1) = 2$ är $\frac{1}{7}$ av alla med $\pi^6(1) \neq 1$ och de med $\pi^6(1) = 1$ är de med 1 i 1, 2, 3, 6-cykler, som ovan $(7)_0 \cdot 7! + (7)_1 \cdot 6! + (7)_2 \cdot 5! + (7)_5 \cdot 2! = 4 \cdot 7!$ stycken, så de med $\pi^6(1) = 2$ är $\frac{1}{7}(8! - 4 \cdot 7!) = 4 \cdot 6!$.) Det sökta antalet är alltså $8! - 4 \cdot 6! = (8 \cdot 7 - 4)6! = 52 \cdot 720 = 37440$.

Svar: Antalet $\pi \in S_8$ med $\pi^6(1) \neq 2$ är **37440**.

8) (4p) Vi skall visa att en graf $G = (V, E)$ (där $V \neq \emptyset$) med antalet hörn med valens 3 lika med antalet hörn med valens antingen 0 eller 1, innehåller minst en cykel.

Lösning: Låt $V' = \{v \in V \mid \delta(v) \neq 0\}$ och $G' = (V', E)$.

G' saknar hörn med valens 0 och antalet hörn med valens 3 är $\geq$ antalet hörn med valens 1. Det betyder att $\sum_{v \in V'} \delta(v) \geq 2|V'|$, men den summan är ("handslagslemmat") $= 2|E|$, så $|E| \geq |V'|$. Om det inte funnes några cykler, vore varje komponent ett träd och skulle innehålla ett hörn mer än kanter. Det skulle innebära att $|V'| = |E| + c$ (c antalet komponenter), men $c > 0$, ty $V \neq \emptyset$ ger att det finns $v \in V$ med $\delta(v) \neq 0$, så $V' \neq \emptyset$. Antagandet att grafen saknar cykler ledde till motsägelse, så den har minst en cykel. **Saken är klar.**

9) Vi söker (a, 1p) 3 olika x med $0 \leq x < 437$ och (b, 4p) alla heltal x som uppfyller $x^3 - 7x^2 + 12x \equiv 0 \pmod{437}$ [$437 = 19 \cdot 23$].

Lösning: Eftersom $x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-3)(x-4)$ är $x = 0, 3, 4$ tre olika lösningar.
 $x^3 - 7x^2 + 12x \equiv 0 \pmod{437} \Leftrightarrow 19 \cdot 23 = 437 \mid x^3 - 7x^2 + 12x = x(x-3)(x-4) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [19 \mid x(x-3)(x-4) \text{ och } 23 \mid x(x-3)(x-4)]$ (eftersom 19 och 23 är primtal).
 x uppfyller alltså den givna kongruensen omm $x \equiv_{19} i, x \equiv_{23} j$, där $i, j \in \{0, 3, 4\}$.
 Det handlar alltså om den kinesiska restsatsen. $23 = 1 \cdot 19 + 4, 19 = 4 \cdot 4 + 3, 4 = 1 \cdot 3 + 1$,
 så $1 = 4 - 3 = 4 - (19 - 4 \cdot 4) = -19 + 5 \cdot 4 = -19 + 5(23 - 19) = 5 \cdot 23 - 6 \cdot 19 = 115 - 114$
 och således $115 \equiv_{19} 1, \equiv_{23} 0$ och $-114 \equiv_{19} 0, \equiv_{23} 1$.
 Modulo $19 \cdot 23 = 437$ ges alltså alla lösningar av $115 \cdot i - 114 \cdot j$. Man finner $115 \cdot 0 - 114 \cdot 0 = 0, 115 \cdot 3 - 114 \cdot 0 = 345, 115 \cdot 4 - 114 \cdot 0 = 460 \equiv_{437} 23, 115 \cdot 0 - 114 \cdot 3 = -342 \equiv_{437} 95, 115 \cdot 3 - 114 \cdot 3 = 3, 115 \cdot 4 - 114 \cdot 3 = 118, 115 \cdot 0 - 114 \cdot 4 = -456 \equiv_{437} 418, 115 \cdot 3 - 114 \cdot 4 = -111 \equiv_{437} 326, 115 \cdot 4 - 114 \cdot 4 = 4$. Lösningarna är alltså precis alla $x \equiv_{437}$ någon av dem.

Svar a: T.ex. $x = 0, 3, 4$,

b: $x = k + 437n$, där $k \in \{0, 3, 4, 23, 95, 118, 326, 345, 418\}$ och $n \in \mathbb{Z}$.

10) Vi skall (a, 1p) visa att $\phi(26^2) = 12 \cdot 26$ och (b, 4p) finna alla $n \in \mathbb{N}_+$ sådana att $\phi(n^2) = 12n$ ($\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ och ϕ är Eulers ϕ -funktion).

Lösning: Enligt en känd sats är $\phi(n) = \prod_i p_i^{e_i-1}(p_i - 1)$ om $n = \prod_i p_i^{e_i}$, där p_i :na är olika primtal och $e_i \in \mathbb{N}_+$. $26^2 = 2^2 \cdot 13^2$, så $\phi(26^2) = 2(2-1) \cdot 13(13-1) = 12 \cdot 26$.
 Om, som ovan, $n = \prod_i p_i^{e_i}$ är $\phi(n^2) = \prod_i p_i^{2e_i-1}(p_i - 1) = n \cdot \prod_i p_i^{e_i-1}(p_i - 1)$. Villkoret för $\phi(n^2) = 12n$ är alltså precis $\prod_i p_i^{e_i-1}(p_i - 1) = 12$. Tydligt måste $p_i - 1$ vara en delare till 12, så andra p_i än 2, 3, 5, 7, 13 är inte tänkbara. Alla $p_i^{e_i-1}(p_i - 1)$ som delar 12 ges av:

	p_i				
	2	3	5	7	13
1	1	2	4	6	12
e_i 2	2	6			
3	4				

Tydligt svarar alla möjligheter att få 12 som en produkt av högst ett tal ur varje kolumn mot
 $n = 13, 2 \cdot 13 = 26, 3 \cdot 7 = 21, 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42, 2^2 \cdot 7 = 28, 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Svar a: Visat ovan, b: Alla lösningar är $n = 13, 21, 26, 28, 36, 42$.