

Matematik, KTH
B.Ek

**Tentamen TENA i kurs
SF1630(/SF1631), DISKRET MATEMATIK för D, F
måndagen den 7 januari 2013, klockan 14.00–19.00.**

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 37p. Till den läggs bonus från lappskrivningarna 1A, 2A och 3A ht 2012, högst 6p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E
krävs	32	27	22	18	15

poäng (inklusive bonus)

13–14 poäng ger omdömet Fx och rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (3p) Visa att en graf med 21 hörn (eng. vertices) och 58 kanter (eng. edges) inte kan vara planär.

(Som vanligt tillåter vi inte multipla kanter eller öglor i grafen.)

2) (3p) Finn alla lösningar $x \in \mathbb{Z}_{741}$ till ekvationen

$$51x = 18.$$

3) På en skrivning bedöms de 5 första uppgifterna med 0 eller 1 poäng och de övriga 5 med 0, 1 eller 2 poäng.

a) (1p) Hur många olika resultat är möjliga?

b) (2p) Hur många av dem innehåller alla poäng 0, 1 och 2?

Med ett ”resultat” menas här en lista av poängen på de olika uppgifterna.

Svaret får innehålla heltal, fakulteter, potenser och de fyra enkla räknesätten.

4) Permutationerna $\pi, \sigma \in S_8$ ges av

$$\pi(1)=\sigma(8)=7, \pi(2)=\sigma(6)=1, \pi(3)=\sigma(3)=6, \pi(4)=\sigma(5)=3,$$

$$\pi(5)=\sigma(4)=8, \pi(6)=\sigma(2)=4, \pi(7)=\sigma(1)=2, \pi(8)=\sigma(7)=5.$$

a) (1p) Skriv π och σ på cykelform.

b) (1p) Är $\pi^2\sigma^3\pi^{-1}\sigma^8\pi^4$ en jämn eller en udda permutation?

c) (1p) Finn ordningen för $\pi\sigma^{-1}$ (dvs det minsta $n \in \mathbb{N}$ med $n \geq 1$ och $(\pi\sigma^{-1})^n = id$).

5) (3p) Studenterna i en kurs är indelade i labgrupper, alla med precis 6 studenter i varje grupp.

Efter labben äter de alla lunch och sitter då precis 6 vid varje bord.

Visa att det går att välja ut en student vid varje bord så att de utvalda studenterna alla tillhör olika labgrupper.

Vänd!

DEL II

6) (4p) Finn alla följder $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ som uppfyller

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 9n2^n, & \text{för } n = 2, 3, 4, \dots \\ a_0 = 3, a_1 = 5. \end{cases}$$

7) (4p) Finn antalet $\pi \in S_8$ (dvs permutationer av $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$) som uppfyller att

$$\pi^6(1) \neq 2.$$

$\pi^6(1)$ står förstås för $\pi(\pi(\pi(\pi(\pi(\pi(1)))))$).

För full poäng skall svaret ges som ett heltal.

8) (4p) Grafen $G = (V, E)$ är inte tom (dvs $V \neq \emptyset$) och antalet hörn med valens (eng. degree) 3 är lika med antalet hörn med valens antingen 0 eller 1. Visa att G innehåller minst en cykel.

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Vi betraktar kongruensen $[437 = 19 \cdot 23]$

$$x^3 - 7x^2 + 12x \equiv 0 \pmod{437}.$$

a) (1p) Finn 3 olika heltal x med $0 \leq x < 437$ som uppfyller kongruensen.

b) (4p) Finn alla heltal x som uppfyller kongruensen.

10) Låt som vanligt Eulers ϕ -funktion för $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ definieras av

$$\phi(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n, \text{sgd}(k, n) = 1\}|.$$

a) (1p) Visa att $\phi(26^2) = 12 \cdot 26$.

b) (4p) Finn alla $n \in \mathbb{N}_+$ som uppfyller

$$\phi(n^2) = 12n.$$

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.