

**Lösningar tentan TENA SF1630, SF1631 DISKRET MATEMATIK, F, D,
28 januari 2012**

Tryckfel kan förekomma.

1) G är en hamiltonsk graf och vi skall visa att om man tar bort $k > 0$ hörn från G , får man en graf med högst k komponenter.

Lösning:

Betrakta en viss hamiltoncykel i G . Då man tar bort $k(> 0)$ hörn, delas cykeln upp i högst k sammanhängande delar (om man tar bort k bitar av en cirkel, har man högst k bitar kvar). Hörnen i varje del av den uppdelade cykeln ligger i samma komponent av den beskurna grafen och varje komponent av denna innehåller minst ett hörn, så antalet komponenter är högst k . **Saken är klar.**

2) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}_{246}$ som uppfyller $117x = 36$.

Lösning:

Problemet motsvarar den diofantiska ekvationen $117x - 246k = 36$. Euklides algoritmen ger $246 = 2 \cdot 117 + 12$, $117 = 9 \cdot 12 + 9$, $12 = 1 \cdot 9 + 3$, $9 = 3 \cdot 3$ så $\text{sgd}(117, 246) = 3$ och $3 = 12 - 1 \cdot 9 = 12 - 1(117 - 9 \cdot 12) = -1 \cdot 117 + 10 \cdot 12 = -117 + 10(246 - 2 \cdot 117) = 10 \cdot 246 - 21 \cdot 117 = 10 \cdot 246 - 39 \cdot 246 + 82 \cdot 117 - 21 \cdot 117 = -29 \cdot 246 + 61 \cdot 117$ ($39 = \frac{117}{3}$, $82 = \frac{246}{3}$).

Multiplikation med 12 ger $-348 \cdot 246 + 117 \cdot 732 = 36$, så $\begin{cases} x_0 = 732 \\ k_0 = 348 \end{cases}$ är en lösning till den diofantiska ekvationen.

(x, k) uppfyller då ekvationen precis om $117(x - x_0) - 246(k - k_0) = 0$, dvs $39(x - x_0) = 82(k - k_0)$, så (entydig faktorisering) $x - x_0 = 82q$, godtyckligt $q \in \mathbb{Z}$. $0 \leq x < 246$ ger de tre värdena $x = 76, 158, 240$.

Svar: Alla lösningar i $\mathbb{Z}_{246}$ är $x = 76, 158, 240$.

3) Vi söker antalet sätt att fördela 30 (identiska) bullar och 15 (identiska) tårtbitar bland 20 (särskiljbara) barn, så att varje barn får minst en bulle och högst en tårtbit?

Lösning:

Bullarna kan fördelas på $\binom{19+10}{19} = \frac{29!}{19! \cdot 10!}$ sätt (först en bulle till varje barn, så väljs 19 väggar bland 19 + 10 bullväggar).

Tårtbitarna kan fördelas på $\binom{20}{15} = \frac{20!}{15! \cdot 5!}$ sätt (välj vilka barn som får en).

Multiplikationsprincipen ger

Svar: De kan fördelas på $\frac{29! \cdot 20!}{19! \cdot 10! \cdot 15! \cdot 5!}$ (= 310545275040) sätt.

4) p är ett primtal och $n > 3$. Vi ska finna det största heltal r så att $p^r \mid \binom{2n}{n}$ i fallen i) $\frac{2}{3}n \leq p \leq n$, ii) $n < p < 2n$.

Lösning:

Om $\frac{2}{3}n \leq p \leq n$ gäller $p \leq n < 2p \leq 2n < 3p$ (inte $2n = 3p$, ty då vore p jämnt, alltså $p = 2$ och $n = 3$), så $p \mid n!$, $p^2 \nmid n!$ och $p^2 \mid (2n)!$, $p^3 \nmid (2n)!$, så $p \nmid \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}$.

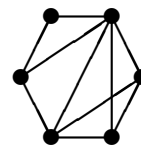
Om $n < p < 2n$ gäller $n < p < 2n < 2p$, så $p \nmid n!$ och $p \mid (2n)!$, $p^2 \nmid (2n)!$, så $p \mid \binom{2n}{n}$, $p^2 \nmid \binom{2n}{n}$.

Svar: i) $r = 0$, ii) $r = 1$.

5) Vi skall avgöra om det finns någon graf med sex hörn och valenser enligt i), ii) och iii).

Lösning:

- i) 1,2,2,4,4,5 : **omöjligt**, ty hörnen med valenser 4,4,5 ger att alla valenser utom högst två måste vara minst 3.
 ii) 2,3,3,3,4,5 : **möjligt**, se figuren till höger.
 iii) 1,2,3,4,4,5 : **omöjligt**, ty summan av valenserna är 2 gånger antalet kanter, dvs ett jämnt tal.



6) m är ett udda heltal. Vi skall visa att $m \mid 2^n - 1$ för något av $n = 1, 2, \dots, m$.

Lösning:

Om inget av talen $2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^m - 1$ vore delbart med m , skulle enligt postfacksprincipen minst två av dem, $2^s - 1$ och $2^t - 1$ med $1 \leq s < t \leq m$ säg, ge samma rest vid division med m (de möjliga resterna $1, 2, \dots, m-1$ är postfacken, de m st talen är breven). Det skulle medföra att $m \mid (2^t - 1) - (2^s - 1) = 2^t - 2^s = 2^s(2^{t-s} - 1)$. Men m är ett udda tal, så det gäve att $m \mid 2^{t-s} - 1$ och eftersom $1 \leq t - s < m$ motsäger det antagandet, så **saken är klar**. (Alt. Enligt Eulers sats är $2^{\phi(m)} \equiv_m 1$, dvs $m \mid (2^{\phi(m)} - 1)$ och $1 \leq \phi(m) \leq m$.)

7) $\alpha \in S_9$: $\alpha(1)=3, \alpha(2)=7, \alpha(3)=1, \alpha(4)=9, \alpha(5)=8, \alpha(6)=5, \alpha(7)=4, \alpha(8)=6, \alpha(9)=2$. Vi söker a) α och α^{-1} på cykelform och b) ett $\sigma \in S_9$ så att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$.

Lösning:

$\alpha(1)=3, \alpha(3)=1$ ger en cykel $(1\ 3)$, $\alpha(2)=7, \alpha(7)=4, \alpha(4)=9, \alpha(9)=2$ ger en cykel $(2\ 7\ 4\ 9)$ och $\alpha(5)=8, \alpha(8)=6, \alpha(6)=5$ ger en cykel $(5\ 8\ 6)$. Totalt $\alpha = (1\ 3)(2\ 7\ 4\ 9)(5\ 8\ 6)$ så $\alpha^{-1} = (3\ 1)(9\ 4\ 7\ 2)(6\ 8\ 5)$.

Att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$ är ekvivalent med $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha^{-1}$.

Men $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(3))(\sigma(2)\sigma(7)\sigma(4)\sigma(9))(\sigma(5)\sigma(8)\sigma(6))$. Vi kan t.ex. välja $\sigma(1)=3, \sigma(2)=9, \sigma(3)=1, \sigma(4)=7, \sigma(5)=6, \sigma(6)=5, \sigma(7)=4, \sigma(8)=8, \sigma(9)=2$, dvs i cykelform $\sigma = (1\ 3)(2\ 9)(4\ 7)(5\ 6)$.

Svar a: $\alpha = (1\ 3)(2\ 7\ 4\ 9)(5\ 8\ 6)$, $\alpha^{-1} = (3\ 1)(9\ 4\ 7\ 2)(6\ 8\ 5)$,

b: (t.ex.) $\sigma = (1\ 3)(2\ 9)(4\ 7)(5\ 6)$.

8) G kan färgas med högst k färger på $P_G(k)$ sätt. På hur många sätt med exakt 5 färger?

Lösning:

Låt X vara mängden av färgningar med 5 givna färger (så $|X| = P_G(5)$) och $A_i, i = 1, 2, \dots, 5$ mängden av färgningar med de 5 färgerna som inte använder färg nr i (så $|A_i| = P_G(4)$). Färgningarna som använder alla 5 färgerna är de som ligger i X men inte i någon av A_i :na. Det sökta antalet fås med sällprincipen:

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_5)| = |X| - (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_5|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_4 \cap A_5|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \dots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|.$$

Antalet termer $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}|$ med j olika A_i :n är $\binom{5}{j}$ och var och en av dem är antalet färgningar med högst $5-j$ färger, dvs $P_G(5-j)$, så antalet är

$$P_G(5) - \binom{5}{1}P_G(4) + \binom{5}{2}P_G(3) - \binom{5}{3}P_G(2) + \binom{5}{4}P_G(1) - \binom{5}{5}P_G(0), \text{ dvs}$$

$$\textbf{Svar: } P_G(5) - 5P_G(4) + 10P_G(3) - 10P_G(2) + 5P_G(1) - P_G(0)$$

9) Kanterna i K_{17} har färgats med tre färger. Vi ska visa att det finns en enfärgad triangel.

Lösning:

Som i exemplet i Biggs 10.1, men "ett steg till".

Välj ett hörn, v_0 säg. Bland dess 16 kanter måste minst 6 ha samma färg, f_0 säg ("generaliserade postfacksprincipen", Biggs 10.1). Låt V' vara mängden av v_0 :s " f_0 -grannar". Om någon kant inom V' har färg f_0 ger den med två kanter till v_0 en enfärgad triangel. Annars, tag ett hörn v_1 i V' , det har minst 5 grannar i V' och alla kanter till dessa har en av två färger. Det finns alltså minst tre kanter (inom V') från v_1 med samma färg, f_1 säg. Låt V'' vara mängden av v_1 :s " f_1 -grannar" i V' . Om någon kant inom V'' har färg f_1 ger den med två kanter till v_1 en enfärgad triangel, annars har alla kanter inom V'' samma färg, men $|V''| \geq 3$, så i alla fallen finns en enfärgad triangel. **Saken är klar**.

10) Vi skall visa att $\phi(mn)\phi(d) = d\phi(m)\phi(n)$, där ϕ är Eulers ϕ -funktion, om $d = \text{sgd}(m, n)$.

Lösning:

Låt P_n vara mängden av primtal som delar n , dvs $P_n = \{p ; p \text{ primtal}, p \mid n\}$. Då är $P_{mn} = P_m \cup P_n$ och, om $d = \text{sgd}(m, n)$, $P_d = P_m \cap P_n$. Enligt känd sats är $\phi(n) = n \prod_{p \in P_n} (1 - \frac{1}{p})$, så $\phi(mn)\phi(d) = mn \prod_{p \in P_{mn}} (1 - \frac{1}{p}) d \prod_{p \in P_d} (1 - \frac{1}{p}) = dmn \prod_{p \in P_{mn}} (1 - \frac{1}{p}) \prod_{p \in P_d} (1 - \frac{1}{p}) = dmn \prod_{p \in P_m} (1 - \frac{1}{p}) \prod_{p \in P_n} (1 - \frac{1}{p}) = d\phi(m)\phi(n)$, ty varje p förekommer lika många gånger totalt i $P_m \cup P_n$ och $P_m \cap P_n$ som i P_m och P_n . **Saken är klar**.
