

Matematik, KTH

B.Ek

**Tentamen TENB i kurs SF1630(/5B1203), SF1631(/5B1204),
DISKRET MATEMATIK för F, D
lördagen den 18 februari 2012, klockan 9.00–14.00.**

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 36p. Till den läggs bonus från de två sista lappskrivningarna ht 2011, högst 4p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	32	27	22	18	15	poäng (inklusive bonus)

12–14 poäng ger omdömet Fx, dvs rätt att försöka komplettera för betyg E.

För kurs 5B1203/1204 är gränserna för 5, 4, 3, K som för A, C, E, Fx ovan.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (3p) Finn ett naturligt tal k så att för alla heltal x, y sådana att $y \equiv x^{165} \pmod{493}$, gäller att $y^k \equiv x \pmod{493}$. [$493 = 17 \cdot 29$].

2) (3p) Definiera den binära operationen $\circ$ på $\mathbb{Z}$ enligt $m \circ n = m + n + 3$ för $m, n \in \mathbb{Z}$. Visa att $(\mathbb{Z}, \circ)$ är en grupp och att den är isomorf med $(\mathbb{Z}, +)$.

3) Låt G_1 och G_2 vara grupper. Som bekant blir produkten $G_1 \times G_2$ en grupp med operationen $*$ om man definierar $(g_1, g_2) * (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$.

a) (1p) Om H_1 och H_2 är delgrupper i G_1 respektive G_2 , måste $H_1 \times H_2$ vara en delgrupp till $G_1 \times G_2$?

b) (2p) Är för alla grupper G_1, G_2 alla delgrupper till $G_1 \times G_2$ av formen $H_1 \times H_2$, där H_1, H_2 är delgrupper till G_1, G_2 ?

4) (3p) I vart och ett av de sex hörnen på en kloss i form av ett triangulärt prisma sitter en färgad kula. Hur många väsentligt olika (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider klossen i rummet) sätt att fördela kulornas färger finns det, om man har kulor av k st färger att tillgå?

Klossens sidoytor är två motstående liksidiga trianglar och tre kvadrater.

5) (3p) Bestäm kvot och rest (eng. quotient, remainder) vid division av $2x^5 + 2x^4 + x^2 + 2$ med $x^3 + 2x^2 + x + 2$ i $\mathbb{Z}_3[x]$.

Med "rest" avses (som vanligt) resten av minimal grad.

Vänd!

DEL II

6) Som kontrollmatris (eng. check matrix) för en linjär, binär kod använder man på prov den godtyckligt valda

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a)** (1p) Vilka kodord har sänts om (011101) och (100101) har mottagits och högst ett fel har uppstått?
b) (2p) Hur många olika ord innehåller koden?

7) (4p) Visa att i en ring $(R, +, \cdot)$ där $x \cdot x = x$ för alla $x \in R$, är $x + x = 0$ för alla $x \in R$.

8) (4p) Låt G vara en grupp, H en delgrupp till G och N en normal delgrupp till G , dvs en delgrupp vars vänstersidoklasser också är högersidoklasser ($gN = Ng$ för alla $g \in G$).

Visa att $HN (= \{hn \mid h \in H, n \in N\})$ är en delgrupp till G .

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9a) (2p) Faktorisera $f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ i irreducibla faktorer.

b) (3p) I kroppen $F = \{b_1\alpha + b_0 \mid b_0, b_1 \in \mathbb{Z}_3\}$, med $g(\alpha) = 0$ för ett lämpligt andragradspolynom, är alla irreducibla faktorer till $f(x)$ av första graden. Finn ett sådant $g(x)$ och en generator för F 's multiplikativa grupp $(F \setminus \{0\}, \cdot)$.

10) (5p) Låt $(F, +, \cdot)$ vara en ändlig kropp, $F = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Visa att produkten av de nollskilda elementen i F , $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$, är 1 eller -1 .

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.