

Lösningar tentan SF1631(/SF1630) DISKRET MATEMATIK, D3 m.fl.,

15 augusti 2012

Tryckfel kan förekomma.

1) Vi söker de värden $P_G(2)$ (antalet hörnfärgningar av grafen G med högst 2 färger) kan anta.

Lösning: Betrakta enligt ledningen först en (icke-tom) sammanhängande graf. Den kan färgas med 2 färger på antingen 0 sätt (om den inte är bipartit) eller 2 sätt (om den är bipartit – eftersom det går en väg mellan två godtyckliga hörn i en sammanhängande graf, är en 2-färgning helt bestämd av färgen på ett hörn). Enligt multiplikationsprincipen ges antalet sätt att färga en godtycklig graf av produkten av antalen för komponenterna.

Svar: $P_G(2)$ kan vara 0 eller 2^k , där k är antalet komponenter i grafen.

2) Vi söker alla lösningar i $\mathbb{Z}_{225}$ till ekvationen $35x + 17 = 82$.

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $35x = 65$ i $\mathbb{Z}_{225}$, som betyder $35x = 65 + 225y$ för något $y \in \mathbb{Z}$, dvs $7x - 45y = 13$.

Euklides algoritim: $45 = 6 \cdot 7 + 3$ $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(45 - 6 \cdot 7) =$
 $7 = 2 \cdot 3 + 1$ $= -2 \cdot 45 + 13 \cdot 7 = 7 \cdot 13 - 45 \cdot 2$

Så $x_1 = 13 \cdot 13 = 169$, $y_1 = 2 \cdot 13 = 26$ löser ekvationen, liksom $x_0 = x_1 - 3 \cdot 45 = 34$, $y_0 = y_1 - 3 \cdot 7 = 5$. Om x, y är en lösning fås $7(x - x_0) - 45(y - y_0) = 0$, så $(\text{sgd}(7, 45) = 1)$ $45 \mid x - x_0$. Det ger $x = x_0 + 45a$ (och $y = y_0 + 7a$). Dessa löser också ekvationen för godtyckligt $a \in \mathbb{Z}$. Värdena i $\mathbb{Z}_{225}$ blir 34, 79, 124, 169 och 214.

Svar: Alla lösningar är $x = 34, 79, 124, 169, 214$.

3) Vi söker antalet sätt 12 personer kan sitta i förhållande till varandra kring ett runt bord med 32 platser, dels (a) om de sitter på godtyckliga (olika) platser, dels (b) om inga sitter jämte (eller på) varandra.

Lösning: En rotation av alla leder till en placering som betraktas som samma, så vi kan börja med att placera en person, Alvar, på plats 1. Alla placeringar av de andra räknas då som olika. De 11 kan placeras på de andra 31 platserna på $(31)_{11} = \frac{31!}{20!}$ sätt (antalet injektioner från en 11-mängd till en 31-mängd).

Sedan Alvar satts på plats 1 som nyss, kan övriga placeras ut på $(19)_{11} = \frac{19!}{8!}$ (injektion från 11-mängden av de övriga till 19-mängden av platser mellan de 20 tomma platserna).

Svar a: På $\frac{31!}{20!} (= 3379847863392000)$ sätt, **b:** på $\frac{19!}{8!} (= 3016991577600)$ sätt.

4) H är en delgrupp till gruppen $(G, \cdot)$ och L, R är en vänstersidoklass respektive en högersidoklass till H (i G). Vi skall för var och en av $A = \{ab^{-1} \mid a, b \in H\}$, $B = \{ab^{-1} \mid a, b \in L\}$ och $C = \{ab^{-1} \mid a, b \in R\}$ avgöra om den säkert är en delgrupp till G . Vi söker också $|A|$, $|B|$ och $|C|$ (uttryckta i $|H|$) då H är ändlig.

Lösning: $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ (ty en delgrupp), så $A \subseteq H$. Om $h \in H$ fås $h1^{-1} = h$, så $h \in A$ (ty $1 \in H$), så $H \subseteq A$. Alltså $A = H$, en delgrupp till G .

Låt $L = gH$, med $g \in G$. $a = gh_1, b = gh_2$ ger $ab^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1}$. Enligt ovan antar $h_1h_2^{-1}$ precis alla värden i H , så $B = gHg^{-1}$. B är en delgrupp till G , ty $1 = g1g^{-1} \in B$ och $ghg^{-1}, gh'g^{-1} \in B$ ger $ghg^{-1}gh'g^{-1} = ghgh'g^{-1} \in B$ och $(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in B$. $h \mapsto ghg^{-1}$ ger en bijektion $H \rightarrow B$, så $|B| = |H|$.

Låt $R = Hg$, med $g \in G$. $a = h_1g, b = h_2g$ ger $ab^{-1} = h_1gg^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}$, så $C = H$, en delgrupp till G .

Svar: A, B och C är alla delgrupper till G . $|A| = |B| = |C| = |H|$.

5) Vi söker alla monadiska irreducibla polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$ som delar både $p(x) = x^6 + 4x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ och $q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 3$.

Lösning: De sökta polynomen är precis de irreducibla faktorerna i $\text{sgd}(p(x), q(x))$.

Division i $\mathbb{Z}_5[x]$ ger: $p(x) = (x+2) \cdot q(x) + r_1(x)$, $r_1(x) = 4x^4 + 4x^3 + x$,

$q(x) = (4x+4) \cdot r_1(x) + r_2(x)$, $r_2(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3$,

$r_1(x) = 2x \cdot r_2(x) + 0$.

Så (monadiska) $\text{sgd}(p(x), q(x)) = 3 \cdot r_2(x) = x^3 + x^2 + 4 = d(x)$.

Vi söker irreducibla faktorer i $d(x)$. $d(0) = 4$, $d(1) = 1$, $d(2) = 1$, $d(3) = 0$, så en (irreducibel) faktor är $x-3 = x+2$. Division ger $d(x) = (x+2)(x^2+4x+2) = (x+2) \cdot e(x)$. $e(3) = 3$, $e(4) = 4$, så $e(x)$ saknar nollställen och är alltså irreducibelt (andragradspolynom utan nollställen är irreducibla).

Svar: De sökta faktorerna är $x+2$ och x^2+4x+2 .

6) Med Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definierade av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N}$, skall vi visa att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller

$$F_{2n-1} = (F_{n-1})^2 + (F_n)^2, \quad F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Lösning: Vi visar med induktion påståendet P_n enligt ovan för alla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Bas: P_1 är sant, ty $F_1 = 1 = 0^2 + 1^2 = (F_0)^2 + (F_1)^2$ och $F_2 = 1 = 1(1+0) = F_1(F_2 + F_0)$.

Steg: Antag P_k för $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dvs $F_{2k-1} = (F_{k-1})^2 + (F_k)^2$, $F_{2k} = F_k(F_{k+1} + F_{k-1})$.

Då fås $F_{2(k+1)-1} = F_{2k+1} = F_{2k-1} + F_{2k} \stackrel{\text{IA}}{=} (F_{k-1})^2 + (F_k)^2 + F_k(F_{k+1} + F_{k-1}) = (F_k)^2 + F_{k-1}(F_{k-1} + F_k) + F_k F_{k+1} = (F_k)^2 + (F_{k-1} + F_k)F_{k+1} = (F_k)^2 + (F_{k+1})^2$.

$F_{2(k+1)} = F_{2k+2} = F_{2k} + F_{2k+1} \stackrel{\text{IA, förra}}{=} F_k(F_{k+1} + F_{k-1}) + (F_k)^2 + (F_{k+1})^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) + F_k(F_{k-1} + F_k) = F_{k+1}(F_{k+2} + F_k)$.

Så om P_k är sant är P_{k+1} sant och enligt induktionsprincipen är saken klar.

7) Var och en av personerna i den ändliga mängden X vill läsa vissa av böckerna i den ändliga mängden Y . Vi skall representera detta med en bipartit graf och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna dels (a) en och dels (b) k böcker (som de vill läsa). (Två olika personer kan inte låna samma bok.)

Lösning: Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara den bipartita grafen med hörmängder X och Y och en kant mellan person $x \in X$ och bok $y \in Y$ precis om x vill läsa y . Villkoret för att de önskade lånen skall vara möjliga är då att det finns en delmängd E_k till E så att varje $x \in X$ ingår i precis k kanter i E_k och varje $y \in Y$ ingår i högst en kant i E_k (a är fallet $k = 1$).

Genom att betrakta en ny graf G' , som fås genom att "dela upp" varje hörn i X i k st kopior och också "dela upp" alla kanter som går till dem, kan villkoret formuleras som att G' skall ha en fullständig matchning. Genom att tillämpa Halls villkor för existens av en sådan, fås (med bokens beteckningar) att ett nödvändigt och tillräckligt villkor (uttryckt i G) för att lånen skall vara möjliga, är att $|J(A)| \geq k|A|$ för alla $A \subseteq X$.

Svar: Grafen enligt ovan. Villkoret är $|J(A)| \geq k|A|$ för alla $A \subseteq X$.

(a är fallet $k = 1$).

8) $\pi \in S_{11}$ ges på tvåradarsform av $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 10 & 9 & 11 & 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Vi söker π på cykelform, dess ordning och dess paritet. Dessutom söker vi den högsta ordning en jämn permutation $\tau \in S_{11}$ kan ha och ett exempel på ett sådant τ .

Lösning: Man finner $\pi = (1\ 7\ 4\ 11\ 6)(2\ 10\ 5\ 3\ 9\ 8)$ (ty $\pi_1(1) = 7, \pi_1(7) = 4$ etc.). Ordningen för en permutation är mgm av cykellängderna, så $o(\pi) = \text{mgm}(5, 6) = 30$. Eftersom π innehåller precis en cykel av jämn längd är det en udda permutation.

En jämn permutation är en med ett jämnt antal cykler av jämn längd. Vi går igenom möjliga cykellängder och motsvarande ordningar (mgm för längderna) för τ , $[11] : 11, [9\ 1^2] : 9, [8\ 2\ 1] : 8, [7\ 3\ 1] : 21, [7\ 2^2] : 14, [7\ 1^4] : 7, [6\ 4\ 1] : 12, [6\ 3\ 2] : 6, [6\ 2\ 1^3] : 6, [5^2\ 1] : 5, [5\ 4\ 2] : 20, [5\ 3^2] : 15, [5\ 3\ 1^3] : 15, [5\ 2^2\ 1^2] : 10, [5\ 1^6] : 5$ och flera som tydligt har $\text{mgm} \leq 12$ (enda primfaktorer högst två 2:or och en 3:a). Högst ordning blir tydligen 21, med cykler $[7\ 3\ 1]$, t.ex. $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)(11)$.

Svar a: $\pi = (1\ 7\ 4\ 11\ 6)(2\ 10\ 5\ 3\ 9\ 8)$, $o(\pi) = 30$ och π är udda,

b: maximal ordning är 21, exempel $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

9) Vi skall visa att om varje kant i K_{17} har en av tre färger finns minst en enfärgad triangel.

Lösning: Resonemanget är som i exemplet i Biggs 10.1, "ett steg till".

Betrakta ett visst hörn, v_0 . Bland dess 16 kanter måste minst 6 ha samma färg, f_0 säg, (enligt den "generaliserade postfacksprincipen", Biggs 10.1). Låt V' vara mängden av v_0 :s "f₀-grannar". Om någon kant inom V' har färg f_0 ger den med två kanter till v_0 en enfärgad triangel. Annars, tag ett hörn v_1 i V' , det har minst 5 grannar i V' och alla kanter till dessa har en av två färger. Det finns alltså minst tre kanter (inom V') från v_1 med samma färg, f_1 säg. Låt V'' vara mängden av v_1 :s "f₁-grannar" i V' . Om någon kant inom V'' har färg f_1 ger den med två kanter till v_1 en enfärgad triangel, annars har alla kanter inom V'' samma färg, men $|V''| \geq 3$, så i alla fallen finns en enfärgad triangel. **Saken är klar.**

10) Vi skall finna rekursionsekvationer och slutna uttryck för $f_i(n)$, $i = 0, 1, 2$. $f_i(n)$ är antalet delmängder av kardinalitet $\equiv i \pmod{3}$ till en n -mängd.

Lösning: För $n = 0$ fås, som i lydelsen, $f_0(0) = 1, f_1(0) = f_2(0) = 0$ ($\emptyset$ är den enda delmängden). Om mängden inte är tom, låt a vara ett element. För varje delmängd gäller precis en av att den innehåller a och att den inte gör det. Additionsprincipen ger $f_i(n+1) = f_{i-1}(n) + f_i(n)$ för $n \in \mathbb{N}$.

Låt $F(n)$ vara $\begin{bmatrix} f_0(n) \\ f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$. Rekursionen blir $F(n+1) = AF(n)$, $F(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, så lösningen är $F(n) = A^n F(0) = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Inför $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, så att $A = B - C$. Man finner $C^3 = I$, $BC = B = CB$, $B^2 = 3B$, så $B^0 = I$, $B^k = 3^{k-1}B$ då $k = 1, 2, \dots$. Eftersom $BC = CB$ fås $A^n = (B - C)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (-C)^{n-k} = (-C)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B^k (-1)^{n-k} = (-C)^n + B \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} (-1)^{n-k} = B \frac{1}{3} ((3-1)^n - (-1)^n) + (-1)^n C^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} B + (-1)^n C^n$.

Eftersom $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $C^k = C^{k-3}$ då $k \geq 3$, ges elementen i den första kolonnen av sista termen av $(-1)^n \delta(i, n)$, där $\delta(i, n) = \begin{cases} 1 & \text{om } i+n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

Svar a: $f_0(0) = 1, f_1(0) = f_2(0) = 0$; $f_i(n+1) = f_{i-1}(n) + f_i(n)$, $n \in \mathbb{N}$,

b: $f_i(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n \delta(i, n)$, där $\delta(i, n) = \begin{cases} 1 & \text{om } i+n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

[Det finns andra sätt att lösa b. T.ex. kan man beräkna A^n med diagonalisering etc. (komplexa matriser) eller beräkna $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \dots$ med hjälp av $(1+x)^n$ (komplexa x) etc.]