

Matematik, KTH

B.Ek

Tentamen i kursen

SF1631 (och SF1630), DISKRET MATEMATIK för D3 m.fl.

onsdagen den 15 augusti 2012, klockan 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.

Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2011, högst 10p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

16–19 poäng ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) Låt $P_G(2)$ (som vanligt) vara antalet olika sätt man kan hörnfärgra grafen G med (högst) 2 färger. Bestäm alla värden som $P_G(2)$ kan anta (för olika grafer G).

[Ledning: Betrakta varje komponent av G för sig.]

2) (4p) Finn alla lösningar i $\mathbb{Z}_{225}$ till ekvationen $35x + 17 = 82$.

3) Kring ett runt bord finns 32 (likvärdiga) platser, där 12 (särskiljbara) personer sätter sig.

a) (2p) På hur många sätt kan de sätta sig (om alla sitter på olika platser och det räknas som samma fördelning om alla flyttar lika många steg åt något håll)?

b) (2p) Samma fråga om inga sitter på platser intill varandra?

(Svaren får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.)

4) Låt $(G, \cdot)$ vara en grupp, H en delgrupp till G , L en vänstersidoklass till H (i G) och R en högersidoklass till H (i G). Avgör (med motivering) om

a) (1p) $A = \{ab^{-1} \mid a, b \in H\}$ säkert är en delgrupp till G ,

b) (1p) $B = \{ab^{-1} \mid a, b \in L\}$ säkert är en delgrupp till G ,

c) (1p) $C = \{ab^{-1} \mid a, b \in R\}$ säkert är en delgrupp till G .

d) (1p) Om H är ändlig, finn $|A|$, $|B|$ och $|C|$ (uttryckta i $|H|$).

5) (4p) Finn alla monadiska (dvs högstgradskoefficienten = 1) irreducibla polynom i $\mathbb{Z}_5[x]$ som är delare till både $p(x) = x^6 + 4x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ och $q(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 3$.

Vänd!

DEL II

6) (5p) Låt som vanligt Fibonacci-talen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & \text{för } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Visa att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$ gäller

$$\begin{cases} F_{2n-1} = (F_{n-1})^2 + (F_n)^2, \\ F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}). \end{cases}$$

7) Givet en (ändlig) mängd X av personer, vilka var och en vill läsa vissa av böckerna i en (likaså ändlig) mängd Y .

a) (2p) Beskriv ett lämpligt sätt att representera detta med en bipartit graf och ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna en bok (som de vill läsa). (Två olika personer kan inte låna samma bok.)

b) (3p) Finn ett nödvändigt och tillräckligt villkor på grafen för att alla personer skall kunna låna k böcker (som de vill läsa).

8a) (2p) Permutationen $\pi \in S_{11}$ (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \dots, 11\}$) ges på tvåradsform av

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 10 & 9 & 11 & 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Skriv π på cykelform, finn dess ordning och avgör om π är en udda eller en jämn permutation.

b) (3p) Finn den högsta ordning en jämn permutation $\tau \in S_{11}$ kan ha och ge (på tvåradsform) ett exempel på en sådan permutation τ .

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) Varje kant i grafen K_{17} , den fullständiga grafen (eng. complete graph) med 17 hörn, ges en av tre färger. Visa att grafen innehåller minst en enfärgad triangel.

10) Låt $f_0(n)$, $f_1(n)$ och $f_2(n)$ vara antalen delmängder till en n -mängd med antal element $\equiv 0, 1$ respektive $2 \pmod{3}$.

Om $|M| = n$ är alltså $f_i(n) = |\{X \subseteq M \mid |X| \equiv i \pmod{3}\}|$.

T.ex. är $f_0(0) = 1$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $f_0(1) = f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 0$.

a) (3p) Ställ upp rekursionsekvationer för $f_i(n)$ (dvs uttryck $f_i(n+1)$:en i $f_j(n)$:en).

b) (3p) Finn slutna uttryck för $f_i(n)$:en (uttrycken kan bli olika beroende på vad n är $\pmod{3}$).

[Det kan löna sig att skriva rekursionsekvationerna med hjälp av 3×3 -matriser.]

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.