(Diskret matte D, ht17: F13, ti 26 sep 2017)

En grupp G **verkar på** mängden X om det finns

$$\mu : G \times X \to X \quad \text{(vi skriver } g(x) \text{ för } \mu(g,x)),$$

så att $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$, och $1(x) = x$ för alla $x \in X$.

Varje g ger då en **bijektion** av X (dvs en permutation, $g \in S_X$).

Om G verkar på en mängd M och X är mängden av färgningar av M (eller någon annan mängd funktioner på M), låter vi G verka på X enligt

$$g(x)(m) = x(g^{-1}(m))$$

dvs "färgerna flyttas med m:en".

Banor för G på X:

$$Gx = \{g(x) \mid g \in G\}, \quad \text{för } x \in X.$$

Banorna ger en **partition** av X, svarande mot ekvivalensrelationen

$$x_1 \sim x_2 \text{ omm } x_2 = g(x_1) \text{ för något } g \in G$$

Stabilisatorn för $x \in X$:

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\},$$

en delgrupp till G.

Allmännare: $G(x \to y) = \{g \in G \mid g(x) = y\}$.

Sats: Om $h \in G(x \to y)$ gäller

$$G(x \to y) = hG_x = G_y h,$$

så $\quad |G(x \to y)| = \begin{cases} |G_x| = |G_y| & \text{om } y \in Gx \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

För fixt x ger alla $G(x \to y)$ då $y \in Gx$ en **partition** av G, så

$$|G| = |Gx||G_x|$$

(speciellt är $|Gx|$ en delare till $|G|$.)

Antalet banor $= \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$,

"omkastad summationsordning" (Thm 10.2 i Biggs) ger

Sats (**"Burnsides lemma"**):

$$\text{Antalet banor } = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|,$$

där ***g*:s fixpunktsmängd** $F(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}$ (ibland betecknad X_g).

Genom att studera G:s verkan på G med **konjugering**, $g(x) = gxg^{-1}$, visas

Sats: Om G är en grupp med $|G| = p^n$ (p primtal, $n \in \mathbb{Z}_+$) gäller

i) $|Z(G)| \geq p \quad$ ii) $|Z(G)| \neq p^{n-1}$

($Z(G)$ är G:s **centrum**, $\{g \in G \mid gx = xg, \text{ alla } x \in G\}$.)

Sats: En grupp G med $|G| = p^2$ (p primtal) är abelsk. (Ty $Z(G) = G$.)