

(Diskret matte D, ht17: F9, fr 15 sep 2017)

Permutationer $\alpha, \beta \in S_n$ kallas **konjugerade** om $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ för något $\sigma \in S_n$. Detta definierar en **ekvivalensrelation** på S_n .

Sats: α och β är konjugerade omm de har **samma cykelstruktur**.

Om α har en cykel $(x_1 x_2 \dots x_k)$ har $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ en cykel $(\sigma(x_1) \sigma(x_2) \dots \sigma(x_k))$

Ekvivalensklasser av konjugerade permutationer motsvarar bijektivt **partitioner av n** , $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}]$, där $n = 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 + \dots + k \cdot \alpha_k$

Antalet permutationer av typ $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}]$:

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k} \alpha_1! \dots \alpha_k!}$$

En **transposition** är en permutation av typ $[1^{n-2} 2]$, dvs $\tau = (ab) \in S_n$, $a \neq b$.

För alla $\pi \in S_n$: $\pi = \tau_r \dots \tau_2 \tau_1$, något r och några transpositioner $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$.

Sats: Om $\pi = \tau_r \dots \tau_2 \tau_1 = \tau'_{r'} \dots \tau'_2 \tau'_1$ har r och r' samma paritet, dvs de är båda jämna eller båda udda.

Det minsta möjliga r -värdet är $n - c(\pi)$, där $c(\pi)$ är antalet cykler i π .

Definition: π är en **jämn(/udda) permutation** omm r är jämnt(/udda).

Tecknet (signum) för π , $\text{sgn } \pi = (-1)^r = \begin{cases} +1 & \pi \text{ jämn} \\ -1 & \pi \text{ udda} \end{cases}$

$$\text{sgn}(\pi\sigma) = \text{sgn } \pi \text{sgn } \sigma$$

$$\text{sgn } \pi^{-1} = \text{sgn } \pi$$

$$\text{sgn}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) = \text{sgn } \alpha$$

Om π är av typ $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots k^{\alpha_k}]$ är

$$\text{sgn } \pi = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots} = (-1)^{n - c(\pi)},$$

där $c(\pi) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$, antalet cykler i π .

En **cykel** är en **jämn** permutation omm den har **udda** längd(!).

En **jämn permutation** är en med ett **jämnt antal** cykler av **jämn längd**.

I S_n ($n \geq 2$) är hälften av permutationerna jämna, hälften udda.

Om $\mathbf{A}$ är en $n \times n$ -matris är

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi \cdot a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \dots a_{\pi(n)n}$$

och (därmed) $\text{sgn } \pi = \det \mathbf{M}_\pi$.