

(Diskret matte D, ht17: F7, må 11 sep 2017)

Linjär rekursionsekvation med konstanta koefficienter,

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_0a_n + f(n), \quad n = 0, 1, \dots$$

där $\{c_{k-1}, \dots, c_0\}$ är givna konstanter och $f(n)$ en given funktion.

Sökt är följderna $\{a_n\}_{n=0}^\infty$.

Homogen ekvation ($f(n) = 0$, alla n), allmän lösning:

$$a_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_j(n)r_j^n$$

$r_1, \dots, r_j$ de **olika** rötterna till **karakteristiska ekvationen**

$$x^k - c_{k-1}x^{k-1} - \dots - c_0 = 0$$

med multipliciteter $m_1, \dots, m_j$,

$P_i(n)$ godtyckliga polynom av grad $\leq m_i - 1$, $i = 1, \dots, j$.

Inhomogen ekvation

$$a_n = a_n^{\text{hom}} + a_n^{\text{part}},$$

a_n^{hom} : den allmänna lösningen till den homogena ekvationen enligt ovan

a_n^{part} : en lösning ("partikulärlösning") till den inhomogena ekvationen. Den fås ofta med hjälp av en **ansats** (dvs en "begåvad gissning").

Om $f(n)$ är ett polynom, av formen α^n (α konstant) [speciellt $e^{i\omega n}$ (ω konstant)] (så, med Re , Im , $\cos(\omega n)$, $\sin(\omega n)$) eller en produkt av sådana, kan man ansätta en lösning av samma form, med koefficienter som bestäms genom insättning i ekvationen. Om en sådan funktion löser den homogena ekvationen måste ansatsen multipliceras med en potens av n .

Metoden att lösa linjära rekursionsekvationer med konstanta koefficienter är alltså mycket lik den för att lösa linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter, r^n här motsvarar $e^{\lambda x}$ där.

Som ett exempel betraktade vi **fibonaccitalen** $(F_n)_{n=0}^\infty$ som definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

så $F_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ för $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. De ges av

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \dots$$

(Hur hänger de ihop med spelet "Fibonacci-nim"? Finns beskrivet på internet.)

I ett annat exempel införde vi den **genererande funktionen**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(egentligen en **formell summa**, inte en funktion, man behöver inte tänka på om summan är konvergent) och formulerade rekursionsekvationen för a_n som en (enkel) ekvation för $f(x)$, vars lösning gav alla a_n .

”Mästarsatsen”

$$\text{Om} \quad \begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) + F(n) \\ T(1) = d \end{cases}$$

så

- 1) om $F(n)$ växer långsammare än $n^{\log_b a}$: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
- 2) om $F(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
- 3) om $F(n)$ växer snabbare än $n^{\log_b a}$: $T(n) \in \Theta(F(n))$

(Mer exakt förutsätts att $a \geq 1$, $b > 1$, $F(n) \geq 0$ i alla fallen.)

I fall 1 krävs $F(n) \in \mathcal{O}(n^c)$ för ett $c < \log_b a$,

i fall 2 kan man ha $F(n) \in \Theta(n^{\log_b a} (\log n)^m)$ för ett $m \geq 0$ och får då $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} (\log n)^{m+1})$,

i fall 3 krävs $F(n) \in \Omega(n^c)$ för ett $c > \log_b a$ och att $aF(\frac{n}{b}) \leq C F(n)$ för stora n och ett $C < 1$.)

$[f(n) \in \Theta(g(n))$ (då $n \rightarrow \infty$) betyder att f och g ”växer lika snabbt”, dvs:

Det finns $N, A, B > 0$ så att $A|g(n)| < |f(n)| < B|g(n)|$, för alla $n > N$,

dvs att $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ och $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.

$f(n) = \Omega(g(n))$ betyder att det finns $N, A > 0$ så att $|f(n)| > A|g(n)|$, för alla $n > N$, dvs att $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.]