

(Diskret matte D, ht17: F4, må 4 sep 2017)

Planära grafer

En **plan graf**: En ”konkret graf” i planet vars kanter inte korsar varandra

En **planär graf**: En graf som är isomorf med en plan graf,
dvs den **kan ritas** i planet utan att kanter korsas

Sats: (Eulers polyederformel): Om en sammanhängande plan graf har v hörn, e kanter och r ytor gäller

$$v - e + r = 2$$

Allmännare: Om grafen har c komponenter gäller

$$v - e + r - c = 1$$

Den ger (eftersom varje yta om $e \geq 2$ har minst 3 kanter)

Sats: För en sammanhängande planär graf med $e \geq 2$ gäller $3v \geq e + 6$

Om grafen också är bipartit gäller $2v \geq e + 4$

Sats: En planär graf har hörn med valens ≤ 5 .

De fullständiga graferna K_n , $n \geq 5$ och $K_{p,q}$, $p, q \geq 3$ är **inte planära**

Om en graf är icke-planär ”innehåller” den alltid (minst) en av K_5 och $K_{3,3}$:

Kuratowskis (1930) och Wagners (1937) satser:

Grafen G är icke-planär **om** en graf som är isomorf med K_5 eller $K_{3,3}$ kan fås från G med en följd (0 eller fler) av operationerna:

- ta bort ett hörn (och dess kanter)
- ta bort en kant
- – Kuratowski: ”sudda ut” ett hörn med valens 2
(bevara en kant mellan dess grannar)
- Wagner: kontrahera en kant
(”dra ihop” hörnen vid kanten till ett nytt hörn)

(Villkoret i Wagners sats kallas att K_5 eller $K_{3,3}$ är en **minor** till G .)

Duala grafen (inte säkert en enkel graf, även om G är det) $G^\perp$ till en plan graf G :
(isomorfa plana grafer kan ha icke-isomorfa dualgrafer.)

ett hörn i var och en av G :s ytor

en kant genom var och en av G :s kanter

Då gäller $v^\perp = r$, $e^\perp = e$ (med v , e , r som i satsen ovan).

Om G är (plan och) sammanhängande, är $r^\perp = v$ och $(G^\perp)^\perp$ isomorf med G .

En **regelbunden polyeder** (en platonsk kropp):

alla sidoytor regelbundna m -hörningar, alla hörn kongruenta, valens n .

Det motsvarar en ”dubbelt reguljär” plan, sammanhängande graf:

alla ytor har **m kanter** (dvs $G^\perp$ är m -reguljär), alla hörn har **valens n** .

Enda möjliga sådana:

m	n	v	e	r	motsvarande polyeder
3	5	12	30	20	ikosaeder (dual till dodekaedern)
3	4	6	12	8	oktaeder (dual till hexaedern)
3	3	4	6	4	tetraeder (dual till sig själv)
4	3	8	12	6	hexaeder (kub) (dual till oktaedern)
5	3	20	30	12	dodekaeder (dual till ikosaedern)

Fyrfärgssatsen: G planär $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

Nästa föreläsning visas sex- och femfärgssatserna.