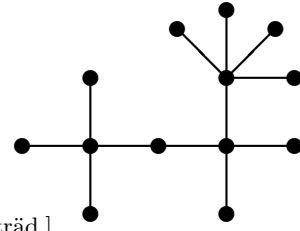


(Diskret matte D, ht17: F3, fr 1 sep 2017)

Ett **träd**  $T = (V, E)$  är  
en **sammanhängande graf utan cykler**

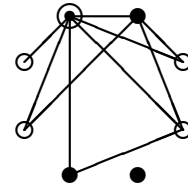
Då

- $x, y \in V \Rightarrow$   
det finns en **unik stig** från  $x$  till  $y$  i  $T$   
[Detta kan användas som en alternativ **definition** av ett träd.]
- om en kant i  $E$  tas bort, återstår två träd
- $|E| = |V| - 1$  (om  $|V| \geq 1$ )



För varje sammanhängande graf  $G = (V, E)$  finns ett **(upp)spännande träd**,  
dvs ett träd  $T = (V, E')$  med  $E' \subseteq E$ .

En **hörfärgning** av grafen  $G = (V, E)$ :  
en funktion  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$   
så att  $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$



**Kromatiska talet**  $\chi(G)$  för  $G$ :  
minsta antalet färger som  $G$  kan hörfärgas med

En **girig algoritm** för att approximera  $\chi(G)$ :

1. ordna hörnen:  $v_1, v_2, \dots, v_n$
2. välj i ordning  $c(v_1), c(v_2), \dots$  minsta möjliga, givet de redan valda

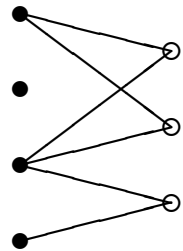
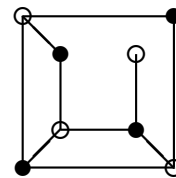
**Sats:**  $G$  har maxvalens  $k \Rightarrow$

- $\chi(G) \leq k + 1$
- om  $G$  sammanhängande och inte reguljär så  $\chi(G) \leq k$

(I själva verket gäller den starkare **Brooks sats** (1941) (inte i boken, nämndes kort på föreläsningen):

Om  $G$  är sammanhängande och inte isomorf med  $K_m$  för något  $m$  eller med  $C_n$  för ett udda  $n$ ,  
är  $\chi(G) \leq k$ , maxvalensen i  $G$ .)

En **bipartit** graf  $G = (X \cup Y, E)$ :  
 $X \cap Y = \emptyset$ , alla kanter mellan  $X$  och  $Y$   
 $\Leftrightarrow$   
 $G$  är 2-(hörfärgbar



**Sats:**  $G$  bipartit  $\Rightarrow \sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y) = |E|$

**Sats:**  $G$  är bipartit  $\Leftrightarrow$  det finns **ingen udda cykel** i  $G$

$G = (X \cup Y, E)$  har hamiltoncykel  $\Rightarrow |X| = |Y|$

$G = (X \cup Y, E)$  har hamiltonstig  $\Rightarrow |X| = |Y|$  eller  $|X| = |Y| \pm 1$

## Det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ för en graf $G$

**Antalet sätt** att hörnfärga grafen  $G = (V, E)$  med (högst)  $\lambda$  färger ges av det **kromatiska polynomet**  $P_G(\lambda)$ .

Kromatiska talet  $\chi(G)$  är det **minsta**  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  med  $P_G(\lambda) \neq 0$ .

$P_G(\lambda)$  är, som namnet antyder, ett polynom.

Dess högstegradsterm är  $\lambda^{|V|}$ .

Nästhögstegradstermen är  $-|E|\lambda^{|V|-1}$ .

Koefficienterna är heltal och alternerande  $\geq 0$  och  $\leq 0$ .

Konstanttermen är 0 (om  $|V| > 0$ ).

Rekursionsformel:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda),$$

där  $G - e$  är grafen  $G$  med kanten  $e$  borttagen och  $G/e$  är  $G$  med kanten  $e$  kontraherad (dvs hörnen i  $e$ 's ändar sammanslagna). Eftersom graferna i högerledet har strikt färre kanter än  $G$  bestämmer detta tillsammans med basen  $P_{(V, \emptyset)}(\lambda) = \lambda^{|V|}$  polynomet  $P_G(\lambda)$  för alla (ändliga) grafer.

Med induktion motsvarande rekursionen visas egenskaperna ovan för  $P_G(\lambda)$ .

Med rekursion fann vi för den cykliska grafen  $C_n$

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

Som en tillämpning av principen om inklusion och exklusion kan man visa (vilket dock inte gjordes på föreläsningen) att antalet sätt att färga  $G$  med **exakt**  $\lambda$  färger är  $\sum_{j=\chi(G)}^{\lambda} (-1)^{\lambda-j} \binom{\lambda}{j} P_G(j)$ .