

Ex. Gruppen G av ikosaederns rotationssymmetrier

Om $g, h \in G$ och g är rotation vinkeln α kring axeln $\mathbf{v}$ är det **konjugerade elementet** hgh^{-1} rotation vinkeln α kring $h\mathbf{v}$.

Ikosaederns sidor kan numreras med $1, \dots, 5$ så att varje $g \in G$ svarar mot en permutation av dem. Det gäller att $G \approx A_5$ (men hela symmetrigruppen (inklusive speglingar) är $\approx A_5 \times C_2$, inte isomorf med S_5).

Sidoklasser

Definition: Om H är en delgrupp till G och $g \in G$ är $gH = \{gh \mid h \in H\}$ en **vänstersidoklass** till H och $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ en **högersidoklass**.

$$|H| = |gH| = |Hg|$$

Sidoklasserna ger **partitioner** av G i lika stora mängder.

Ex. $G_\Delta = \{i, r, r^2, x, xr, xr^2\}$, med $r^3 = x^2 = i$, $rx = xr^2$ och $H = \{i, x\}$ ger
 $iH = xH = H$, $rH = xr^2H = \{r, xr^2\}$, $r^2H = xrH = \{r^2, xr\}$
 $Hi = Hx = H$, $Hr = Hxr = \{r, xr\}$, $Hr^2 = Hxr^2 = \{r^2, xr^2\}$

Vänstersidoklasser:

i	r	xr
x	xr^2	r^2

Högersidoklasser:

i	r	xr
x	xr^2	r^2

Lagranges sats: Om G är ändlig och H en delgrupp till G gäller

$$|H| \mid |G|.$$

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}, H\text{'s index i } G, \text{ antalet sidoklasser till } H \text{ i } G.$$

Sats: Om G är en grupp med $|G| = n$ gäller

$$o(g) \mid n \text{ och } g^n = 1, \text{ alla } g \in G$$

Sats: En grupp av **primitalsordning** är **cyklisk**, $G = \langle x \rangle$ för alla $x \in G \setminus \{1\}$.

Ex. Normala delgrupper

Definition: Delgruppen N till G kallas en **normal delgrupp** omm vänstersidoklasserna = högersidoklasserna, dvs

$$gN = Ng \text{ för alla } g \in G \quad (\text{ekvivalent: } gNg^{-1} = N).$$

(Speciellt är alla delgrupper till en abelsk grupp normala.)

Då är $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ en grupp, **kvotgruppen**,

$$\text{med operation } g_1Ng_2N = \{h_1h_2 \mid h_1 \in g_1N, h_2 \in g_2N\} = g_1g_2N.$$

Definition: En funktion $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ kallas en **homomorfi** mellan grupperna $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ omm:

$$\psi(g *_1 g') = \psi(g) *_2 \psi(g') \quad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

(En isomorfi är alltså precis en bijektiv homomorfi.)

Om N är en normal delgrupp till G är $\psi : G \rightarrow G/N$ med $\psi(g) = gN$ en homomorfi.

För varje homomorfi $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ är $N = \psi^{-1}[1_2]$ en normal delgrupp till G_1 och $G_1/N \approx \psi[G_1]$.