

Algebradelen av kursen börjar med begreppet **grupp**, definierat **axiomatiskt**:

$(G, *)$ är en **grupp** om G1–G4 är uppfyllda (G en mängd, $*$ en binär operation),

- G1. $\forall x, y \in G \quad x * y \in G$ slutenhets
G2. $\forall x, y, z \in G \quad (x * y) * z = x * (y * z)$ associativitet
G3. $\exists e \in G \quad \forall x \in G \quad e * x = x * e = x$ identitet
G4. $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ invers

($\forall x \in G \dots$ betyder här "för alla x i G gäller $\dots$ ",

$\exists x \in G \dots$ betyder "det finns (minst) ett x i G så att $\dots$ ".)

(Vi skriver ofta $\cdot, +$ (eller inget) för $*$ och 1, 0 eller I för e i en grupp.)

Exempel: Symmetrigrupper, $\{n \times n\text{-matriser med determinant} \neq 0\}$,

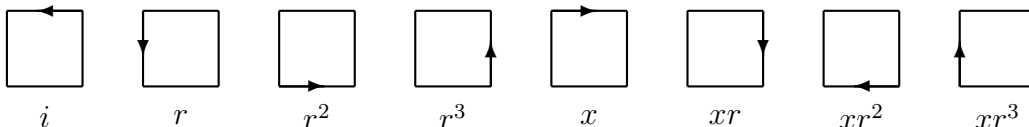
$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_m, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, S_n , $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$ (p primtal), $(U(\mathbb{Z}_m), \times), \dots$

Som exempel visades **grupptabellerna** ("multiplikationstabellerna") för G_Δ och $G_\square$, **symmetrigrupperna** för en **liksidig triangel** och för en **kvadrat**.

Elementen i $G_\square$ är symmetriavbildningar för kvadraten:

Rotationer:

speglingar:



(i är identitetsavbildningen. Figurerna visar hur motsvarande avbildning "flyttar" kvadraten från "standardläget", det vid i ovan.)

Gruppen **genereras** av $\{x, r\}$, dvs varje element kan som ovan skrivas som $x^i r^j$ med $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Gruppen beskrivs helt av **relationerna**
 $x^2 = r^4 = i, \quad rx = xr^3$

Grupptabellen blir:

	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
i	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
r	r	r^2	r^3	i	xr^3	x	xr	xr^2
r^2	r^2	r^3	i	r	xr^2	xr^3	x	xr
r^3	r^3	i	r	r^2	xr	xr^2	xr^3	x
x	x	xr	xr^2	xr^3	i	r	r^2	r^3
xr	xr	xr^2	xr^3	x	r^3	i	r	r^2
xr^2	xr^2	xr^3	x	xr	r^2	r^3	i	r
xr^3	xr^3	x	xr	xr^2	r	r^2	r^3	i

Slut på exemplet.

Om $ab = ba$ för alla $a, b \in G$ kallas G **abelsk** (eller **kommutativ**)

Sats: Om a, b är element i gruppen G har ekvationerna $ax = b$ och $ya = b$ **entydiga lösningar** $x = a^{-1}b$, $y = ba^{-1}$ i G .

Grupptabellen är alltså en **latinsk kvadrat**.

En **isomorfi** mellan $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$: en **bijektion** $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ så att

$$\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g') \quad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

Vi skriver $(G_1, *) \approx (G_2, \circ)$ (eller oftast bara $G_1 \approx G_2$) då G_1 och G_2 är isomorfa. Isomorfi är en ekvivalensrelation mellan grupper.

Ordningen $\begin{cases} \text{för en grupp } G : |G| \\ \text{för ett element } g \in G : o(g) \end{cases}$

$$o(g) = \begin{cases} \text{om } g^n = 1, \text{ något } n > 0 : \text{minsta sådana } n \\ \text{annars} : \infty \end{cases}$$

Sats : Om $o(g) = m$: $g^s = 1 \Leftrightarrow m \mid s$