

(Diskret matte D, ht16: F16, to 6 okt 2016)

Nedan är alla funktioner **aritmetiska**, dvs funktioner $: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$.

(Behöver inte vara just $\mathbb{C}$, men man måste kunna addera och multiplicera värdena "som vanligt".)

Symbolen $\sum_{d|n}$ betecknar summation över alla **positiva** delare d till n .

Eulers ϕ -funktion: $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N}_n \mid \text{sgd}(x, n) = 1\}|$

Sats: Om $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ ($p_1, \dots, p_r$ olika primtal, alla $e_i \geq 1$):

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

ϕ är **multiplikativ**, dvs $\text{sgd}(m, n) = 1 \Rightarrow \phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

Sats: $\sum_{d|n} \phi(d) = n$

Möbiusfunktionen $\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & y^2 \mid n, \text{ något } y \geq 2 \\ (-1)^r & n = p_1 p_2 \dots p_r, \text{ olika primtal} \end{cases}$

Sats: $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$

Möbius inversionsformel:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \iff g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d)$$

speciellt: $\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$

Faltningen $f * g$ av f och g :

$$(f * g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$$

För alla aritmetiska funktioner f, g, h gäller:

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

f, g multiplikativa $\Rightarrow f * g$ multiplikativ

Resultat ovan kan uttryckas

$$1 * \phi = id$$

där

$$1 * \mu = \delta$$

$$1(n) = 1$$

$$\delta * f = f$$

$$id(n) = n$$

Möbius inversionsformel tar formen

$$f = 1 * g \iff g = \mu * f$$

speciellt: $\phi = \mu * id$