

(Diskret matte D, ht16: F15, må 3 okt 2016)

En **ekvivalensrelation** $\mathcal{R}$ på en mängd X är en relation $\mathcal{R}$ med (för alla $x, y, z \in X$)

- i) $x\mathcal{R}x$ (reflexiv)
- ii) $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (symmetrisk)
- iii) $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (transitiv)

Ekvivalensklasser $\mathcal{C}_x = [x] = \{y \in X \mid y\mathcal{R}x\}$

$$[x] \neq \emptyset \ (x \in [x]), \text{ alla } x \in X, \text{ och } [x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y].$$

En **partition** av X : $\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ med

- 0) $X_i \neq \emptyset, \quad X_i \subseteq X, \quad \text{alla } i \in \mathcal{I},$
- 1) $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i = X,$
- 2) $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset, \quad \text{alla } i, j \in \mathcal{I}.$

Ekvivalensrelasjoner på X motsvarar **bijektivt** partitioner av X :

Givet en ekvivalensrelation utgör ekvivalensklasserna en partition.

Givet en partition finns en ekvivalensrelation med X_i :na som ekvivalensklasser.

Stirlingtalen $S(n, k)$: antalet partitioner av en n -mängd i precis k delar.

Rekursivt:

$$\begin{cases} S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k), & 1 < k < n \\ S(n, 1) = S(n, n) = 1, & 1 \leq n \end{cases}$$

”Stirlings triangel”:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
& & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & 1 & 3 & & 1 & & 1 & & & & \\
& & & & & & 1 & 7 & 6 & & 1 & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & & 1 & & & \\
& & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 & & 1 & & \\
1 & & 1 & & 63 & & 301 & & 350 & & 140 & & 21 & & 1 & & 1 \\
& & & & & & & & \vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Om X, Y är ändliga mängder, $|X| = n$, $|Y| = k$:

Sats: Antalet surjektioner $f : X \rightarrow Y$

$$k! S(n, k)$$

Antalet **ekvivalensrelationer** på X ($|X|=n$) = antalet **partitioner** av X =

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)$$