

(Diskret matte D, ht16: F12, ti 20 sep 2016)

En sak till om kardinaliteter

Sats: Om mängderna X_i , $i = 1, 2, \dots$ är uppräkneliga är $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ uppräknelig.

Följd: $\mathbb{Q}$ är uppräknelig (så de reella talen är **många fler** än de rationella).

Additionsprincipen: Om A, B ändliga, disjunkta (dvs $A \cap B = \emptyset$) gäller

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Allmänare: $|A_1 \cup \dots \cup A_m| = |A_1| + \dots + |A_m|$ om $A_i \cap A_j = \emptyset$ då $i \neq j$

Allmän postfacksprincip:

Om $n > q_1 + q_2 + \dots + q_m$ och n saker fördelas på m lådor innehåller någon låda, i , minst $q_i + 1$ saker.

(Speciellt om $n > mr$, minst $r + 1$ st i någon låda.)

Produktmengen $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Sats: Om $S \subseteq X \times Y$, X, Y ändliga,

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$$

$$|X \times Y| = |X| |Y| \quad \text{multiplikationsprinzipen}$$

där **radsumman** $r_x(S) = |\{y \in Y \mid (x, y) \in S\}|$

och **kolumnsumman** $c_y(S) = |\{x \in X \mid (x, y) \in S\}|$

Om X, Y är ändliga mängder, $|X| = m, |Y| = n$:

Sats: Antalet funktioner $f : X \rightarrow Y$

= antalet element i $Y^m = Y \times Y \times \cdots \times Y$ (m st)

$=$ antalet ord av längd m i Y

= antalet **ordnade** val med upprepning av m st ur Y

$$= n^m = |Y|^{|X|}$$

Sats: Antalet injektioner $f : X \rightarrow Y$

= antalet ord av längd m i Y utan upprepning

= antalet **ordnade val utan upprepning** av m st ur Y

$$= n(n-1)\dots(n-m+1) = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Definition: Binomialtalet $\binom{n}{r}$, (läses "n över r")

$=$ antalet r -delmängder till Y

= antalet **oordnade** val av r st från Y , utan upprepning

Rekursivt:

Pascals triangel:

$$\begin{cases} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \end{cases} \quad 0 < r < n$$

Sats: $\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(Kommer nästa föreläsning:)

Binomialsatsen: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$