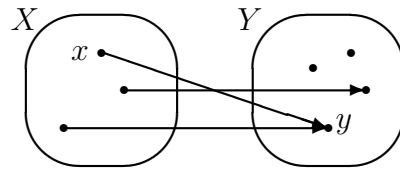


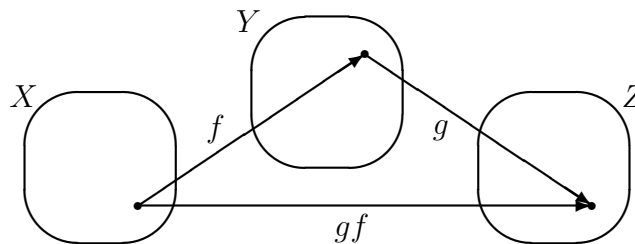
Funktioner, avbildningar

$$f : X \rightarrow Y, \quad y = f(x)$$



Sammanläggning av funktioner

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z \quad \text{ger} \quad gf : X \rightarrow Z, \quad (gf)(x) = g(f(x))$$



Observera ordningen mellan f -pilen och g -pilen!

$f : X \rightarrow Y$ är en

surjektion omm $f(x) = y$ har **minst en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$

injektion omm $f(x) = y$ har **högst en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$

bijektion omm $f(x) = y$ har **exakt en** lösning $x \in X$ för alla $y \in Y$

Sats: Sammansättning av två α jektioner ger en α jektion ($\alpha = sur, in, bi$).

$g : Y \rightarrow X$ är en **inversfunktion** f^{-1} till $f : X \rightarrow Y$ omm $fg = id_Y, gf = id_X$

Sats: $f : X \rightarrow Y$ är inverterbar omm f är en bijektion

f^{-1} är då också en bijektion och $(f^{-1})^{-1} = f$.

Att mängden X har n element, skrivet $|X| = n$, betyder att det finns en bijektion $f : \mathbb{N}_n \rightarrow X$ ($\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\} = [n]$ och $[0] = \emptyset$).

Allmänt har mängderna X och Y **samma kardinalitet**, $|X| = |Y|$, omm det finns en **bijektion** $f : X \rightarrow Y$.

Att X är **uppräknelig** betyder att det finns en bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, dvs $|X| = |\mathbb{N}| (= \aleph_0$ ("alef-noll", namnet på det minsta oändliga **kardinaltalet**)).

$\mathbb{R}$, de reella talen, är **oändlig** men **inte uppräknelig** (överuppräknelig).

Sats: (Cantor) För alla mängder X gäller att $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.

($\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$, **potensmängden** till X).

$|A| > |B|$ betyder att det finns en injektion $f : B \rightarrow A$, men ingen bijektion.)

(V , "mängden av alla mängder", **finns inte** (om $\{x \in M \mid Px\}$ är en mängd för varje mängd M och "egenskap" (enställt predikat) P), ty $R = \{x \in V \mid x \notin x\}$ ger $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ (Russells paradox).)

Postfacksprincipen: (kommer nästa föreläsning)

Om $|X| = n, |Y| = m, n > m$, finns **ingen injektion** $X \rightarrow Y$

"Om $n > m$ och n saker läggs i m lådor, får minst en låda minst två saker."