

(Diskret matte D, ht13: F28, to 5 dec 2013)

Om felrättande koder

En **kod** $\mathcal{C}$ är en mängd n -tupler av 0:or och 1:or, dvs

$$\mathcal{C} \subseteq V^n, \quad (V = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\})$$

n : kodens **längd**

Minimala avståndet för $\mathcal{C}$:

$$\delta = \min\{\partial(a, b) \mid a, b \in \mathcal{C}, a \neq b\}$$

där $\partial(a, b)$ = antalet i med $a_i \neq b_i$.

$\mathcal{C}$ kan **upptäcka** upp till $\delta - 1$ fel

och **rätta** upp till $\lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$ fel ($\lfloor x \rfloor$ = heltalsdelen av x = största heltal $\leq x$)

Sfärpackningssatsen :

Om koden $\mathcal{C}$, av längd n , rättar upp till e fel,

$$|\mathcal{C}| \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{e} \right) \leq 2^n (= |V^n|)$$

$\mathcal{C}$ är en **linjär kod** om

$$a, b \in \mathcal{C} \Rightarrow a + b \in \mathcal{C}$$

dvs $\mathcal{C}$ är ett **delrum** till vektorrummet V^n

$|\mathcal{C}| = 2^k$, där k kallas (och är) $\mathcal{C}$'s **dimension**

För en linjär kod är minimala avståndet = **minimala** (nollskilda) **vikten**, dvs

$$\delta = w_{\min} = \min\{w(c) \mid c \in \mathcal{C}, c \neq 0\}$$

där vikten för c , $w(c)$, är antalet 1:or i c .

Om H är en $m \times n$ -matris är $\mathcal{C} = \{x \in V^n \mid Hx = 0\}$ en linjär kod av dimension $n - \text{rank} H$. H kallas kodens (paritets)**kontrollmatris**.

Sats: Om H 's alla kolonner är olika och $\neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, så rättar $\mathcal{C}$ (minst) ett fel.

För att rätta fel :

z ett kodord med fel i position $i \Rightarrow Hz = H$'s i :e kolonn.

Hammingkoder ges av en kontrollmatris H med r rader och $2^r - 1$ kolonner, alla olika och $\neq 0$

längd	$n = 2^r - 1$
minimiavstånd	$\delta = 3$
dimension	$k = 2^r - r - 1$

Hammingkoder ger likhet i sfärpackningssatsen, de är **perfekta koder**.