

(Diskret matte D, ht13: F24, on 20 nov 2013)

Vi definierade två nya matematiska strukturer, med två operationer,

$(R, +, \times)$ är en **ring** om

1) $(R, +)$ är en **kommutativ grupp** med **identitetselement** 0

2) $(R, \times)$ är **sluten** och **associativ**, med **identitetselement** 1

3) $\times$ är **distributiv** m.a.p. $+$,

$$a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc \quad \text{för alla } a, b, c \in R$$

Exempel: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, $M_n(R)$, $R[x]$ (polynom med koefficienter i en ring R)

$U(R)$: de **inverterbara** elementen i R

$(U(R), \times)$ är en **grupp**.

Exempel: $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$

$$U(\mathbb{Z}_m) = \{r \in \mathbb{Z}_m \mid \text{sgd}(r, m) = 1\}, \quad |U(\mathbb{Z}_m)| = \phi(m)$$

$(F, +, \times)$ är en **kropp** om

1) $(F, +, \times)$ är en **ring**

2) $(F \setminus \{0\}, \times)$ är en **kommutativ grupp**

Exempel: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ (p primtal)

$R[x]$, mängden av **polynom** över en ring R ,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in R$$

$f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ definieras "som vanligt".

Det är viktigt att inte tänka på polynom som funktioner. T.ex. definierar x och x^2 i $\mathbb{Z}_2[x]$ samma funktion $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, men de är olika polynom (två polynom är lika om och endast om motsvarande koefficienter är lika).

$f(x)$:s **grad**, $\deg f(x)$, är det **största** n med $a_n \neq 0$ (om alla $a_n = 0$, dvs $f(x)$ är **nollpolynomet**, kan vi låta $\deg f(x)$ vara $-\infty$ (eller odefinierad)).

Om $f(x), g(x) \in R[x]$ gäller

$$\deg(f(x) + g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$$

$$\deg(f(x)g(x)) \leq \deg f(x) + \deg g(x)$$

Om $f(x), g(x) \in F[x]$, polynom över en **kropp** F :

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

$R[x]$ och $F[x]$ är **ringar**.

Sats: Om $a(x), b(x) \in F[x]$, $b(x) \neq 0$ (nollpolynomet), finns entydigt bestämda $q(x), r(x) \in F[x]$, $\deg r(x) < \deg b(x)$ med

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

Polynomdivision i $F[x]$, "vanliga algoritmen"