

(Diskret matte D, ht13: F22, ti 12 nov 2013)

Först gjordes ex. 20.10:23 i Biggs (med Halls giftermålssats).

## Om cykliska grupper

**Sats:** Om  $G$  är en grupp med  $|G| = n$  är 1., 2., 3. **ekvivalenta**

- $$\begin{cases} 1. & G \text{ är cyklisk} \\ 2. & d \mid n \Rightarrow |\{x \in G ; x^d = 1\}| = d \\ 3. & d \mid n \Rightarrow |\{x \in G ; o(x) = d\}| = \phi(d) \end{cases}$$

**Sats:** Alla delgrupper till  $C_n$  är **cykliska**.

Det finns **precis en** delgrupp av ordning  $d$ , alla  $d \mid n$ .

Om  $c \mid d$ ,  $d \mid n$  och  $C_n$ :s delgrupper av ordningar  $c$ ,  $d$  är  $C_c$ ,  $C_d$ , så  $C_c \subseteq C_d$ .

## Cauchys sats om element av primtalsordning

**Sats:** Om  $G$  är en ändlig grupp,  $|G| = n$ , och  $p$  är en primfaktor i  $n$ , finns ett element  $g \in G$  av ordning  $p$ .

Med hjälp av den visade vi att varje grupp av ordning 6 är isomorf med en av

$$C_6 (\approx (\mathbb{Z}_6, +)) \text{ och } S_3 (\approx G_\Delta).$$

## Om cayleygrafer (orientering)

En cayleygraf (eller ett cayleydiagram) för en grupp (egentligen för en framställning av gruppen med generatorer) beskriver gruppen fullständigt.

Grafen har ett hörn för varje element i gruppen och om grafen genereras av  $a, b, \dots$  (dvs om varje  $g \in G$  kan skrivas som en produkt av sådana) har den riktade kanter av olika typer (eller färger), svarande mot  $a, b, \dots$ . En  $a$ -kant från hörn  $g$  slutar i hörn  $ga$  osv.

En cayleygraf för  $G_\square$ , kvadratens symmetrigrupp: Gruppen genereras ju av  $r$  och  $x$  med relationerna  $r^4 = x^2 = i$ ,  $rx = xr^3$ .

Heldragna pilar svarar här mot  $r$ , avbrutna mot  $x$ . För att t.ex. finna  $r^3 \cdot xr^2$  i grafen: gå från hörnet  $r^3$  längs en pilföljd som leder från  $i$  till  $xr^2$ , t.ex.  $x, r, r$  (eller  $r, r, x$  eller  $r, r, r, x, r$ ), och hamna i resultatet,  $xr^3$ .

Samma grupp kan beskrivas med denna graf:

Här används generatorerna  $x$  och  $y$  (där  $y = xr$ ) med relationerna  $x^2 = y^2 = (xy)^4 = i$ .

Heldragna pilar svarar nu mot  $y$ , avbrutna mot  $x$ .

Ett sådant diagram med punkter och pilar är en cayleygraf för en grupp precis om:

1. Både till och från varje punkt går precis en pil av varje typ.
2. Om en pilföljd från en punkt leder tillbaks till startpunkten, gör motsvarande pilföljd från en annan punkt också det (t.ex.  $r, x, r, r, r, x, r, r$  i den övre grafen).

Man kan välja vilken punkt man vill som enhetselement och beräkna vilka element som svarar mot övriga punkter.

