(Diskret matte D, ht13: F21, må 11 nov 2013)

Ex. Gruppen G av ikosaederns rotationssymmetrier

Om $g, h \in G$ och g är rotation vinkeln α kring axeln $\boldsymbol{v}$ är det **konjugerade elementet** hgh^{-1} rotation vinkeln α kring $h\boldsymbol{v}$.

Ikosaederns sidor kan numreras med $1, \ldots, 5$ så att varje $g \in G$ svarar mot en permutation av dem. Det gäller att $G \approx A_5$ (men hela symmetrigruppen (inklusive speglingar) är $\approx A_5 \times C_2$, inte isomorf med S_5).

Sidoklasser

Definition: Om H är en delgrupp till G och $g \in G$ är $gH = \{gh \mid h \in H\}$ en **vänstersidoklass** till H och $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ en **högersidoklass**.

$$|H| = |gH| = |Hg|$$

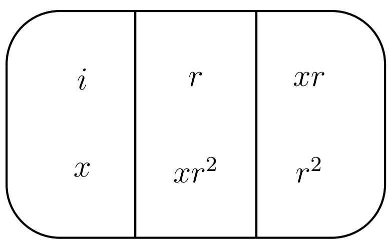
Sidoklasserna ger **partitioner** av G i lika stora mängder.

Ex. $G_\triangle = \{i, r, r^2, x, xr, xr^2\}$, med $r^3 = x^2 = i$, $rx = xr^2$ och $H = \{i, x\}$ ger

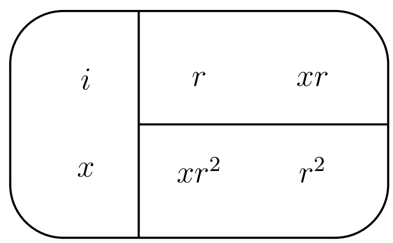
$iH = xH = H$, $rH = xr^2H = \{r, xr^2\}$, $r^2H = xrH = \{r^2, xr\}$

$Hi = Hx = H$, $Hr = Hxr = \{r, xr\}$, $Hr^2 = Hxr^2 = \{r^2, xr^2\}$

Vänstersidoklasser:



Högersidoklasser:



Lagranges sats: Om G är ändlig och H en delgrupp till G gäller

$$|H| \,\Big|\, |G|$$

$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}$, H:s **index** i G

Sats: Om G är en grupp med $|G| = n$ gäller

$$o(g) \mid n \text{ och } g^n = 1, \text{ alla } g \in G$$

Sats: En grupp av **primtalsordning** är **cyklisk**, $G \approx C_p$

Ex. Normala delgrupper

Definition: Delgruppen N till G kallas en **normal delgrupp** om vänstersidoklasserna = högersidoklasserna, dvs

$$\boldsymbol{gN = Ng} \text{ för alla } g \in G \quad (\text{ekvivalent: } gNg^{-1} = N).$$

(Speciellt är alla delgrupper till en abelsk grupp normala.)

Då är $\boldsymbol{G/N} = \{gN \mid g \in G\}$ en grupp, **kvotgruppen**,

med operation $g_1Ng_2N = \{h_1h_2 \mid h_1 \in g_1N, h_2 \in g_2N\} = g_1g_2N$.

Definition: En funktion $\psi : G_1 \to G_2$ kallas en **homomorfi** mellan grupperna $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ om:

$$\psi(g *_1 g') = \psi(g) *_2 \psi(g') \qquad \text{för alla } g, g' \in G_1.$$

(En isomorfi är alltså precis en bijektiv homomorfi.)

$\psi : G \to G/N$ med $\psi(g) = gN$ är en homomorfi.