

(Diskret matte D, ht13: F14, on 2 okt 2013)

Principen om inklusion och exklusion (sällprincipen)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \alpha_i$$

$$\text{där } \alpha_i = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n} |A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_i}|.$$

$$\begin{aligned} \text{ex. } |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \\ &= \underbrace{(|A_1| + |A_2| + |A_3|)}_{\alpha_1} - \underbrace{(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_2} + \underbrace{(|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)}_{\alpha_3} \end{aligned}$$

Ett par exempel om kombinatorik och grafteori

Antalet vandringar mellan givna hörn i en graf

Antalet vandringar av längd r mellan hörnen i och j i grafen G är ij -elementet i matrisen A^r , där A är grammatrisen för G (dvs $a_{ij} = 1$ om i och j är grannar, $= 0$ annars). G kan här också vara riktad och ha öglor och multipla kanter. (Visas med additions- och multiplikationsprinciperna.)

Det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ för en graf G

Antalet sätt att hörnfärga grafen $G = (V, E)$ med (högst) λ färger ges av det **kromatiska polynomet** $P_G(\lambda)$.

Kromatiska talet $\chi(G)$ är det **minsta** $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ med $P_G(\lambda) \neq 0$.

$P_G(\lambda)$ är, som namnet antyder, ett polynom.

Dess högstegradsterm är $\lambda^{|V|}$.

Nästhögstegradstermen är $-|E|\lambda^{|V|-1}$.

Koefficienterna är alternerande ≥ 0 och ≤ 0 .

Konstanttermen är 0 (om $|V| > 0$).

Rekursionsformel:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda),$$

där $G - e$ är grafen G med kanten e borttagen och G/e är G med kanten e kontraherad (dvs hörnen i e :s ändar sammanslagna). Eftersom graferna i högerledet har strikt färre kanter än G bestämmer detta tillsammans med basen $P_{(V, \emptyset)}(\lambda) = \lambda^{|V|}$ polynomet $P_G(\lambda)$ för alla (ändliga) grafer.

Med induktion motsvarande rekursionen visas egenskaperna ovan för $P_G(\lambda)$.

Med rekursion fann vi för den cykliska grafen C_n

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

Som en tillämpning av principen om inklusion och exklusion kan man visa (vilket dock inte gjordes på föreläsningen) att antalet sätt att färga G med **exakt** λ färger är $\sum_{j=\chi(G)}^{\lambda} (-1)^{\lambda-j} \binom{\lambda}{j} P_G(j)$.