(Diskret matte D, ht13: F12, on 25 sep 2013)

En sak till om kardinaliteter

Sats: Om mängderna X_i, $i = 1, 2, \ldots$ är uppräkneliga är $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ uppräknelig.
Följd: $\mathbb{Q}$ **är uppräknelig** (så de reella talen är **många fler** än de rationella).

Additionsprincipen: Om A, B **ändliga, disjunkta** (dvs $A \cap B = \varnothing$) gäller

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Allmännare: $|A_1 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + \cdots + |A_m| \quad$ om $A_i \cap A_j = \varnothing$ då $i \neq j$

Allmän postfacksprincip:
Om $n > q_1 + q_2 + \ldots q_m$ och n saker fördelas på m lådor innehåller någon låda, i, minst $q_i + 1$ saker.
(Speciellt om $n > mr$, minst $r + 1$ st i någon låda.)

Produktmängden $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$

Sats: Om $S \subseteq X \times Y$, $\quad X, Y$ ändliga,

$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$

$|X \times Y| = |X||Y|$ **multiplikationsprincipen**

där **radsumman** $r_x(S) = |\{y \in Y \mid (x, y) \in S\}|$
och **kolumnsumman** $c_y(S) = |\{x \in X \mid (x, y) \in S\}|$

Om X, Y är ändliga mängder, $|X| = m, |Y| = n$:

Sats: Antalet funktioner $f : X \to Y$

$=$ antalet element i $Y^m = Y \times Y \times \cdots \times Y$ (m st)

$=$ antalet ord av längd m i Y

$=$ antalet **ordnade val med upprepning** av m st ur Y

$= n^m = |Y|^{|X|}$

Sats: Antalet injektioner $f : X \to Y$

$=$ antalet ord av längd m i Y utan upprepning

$=$ antalet **ordnade val utan upprepning** av m st ur Y

$= n(n-1) \ldots (n-m+1) = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}$

(Kommer nästa föreläsning:)

Sats: Antalet r-delmängder till Y

$=$ antalet **oordnade** val av r st från Y, **utan upprepning**

$=$ **binomialtalet** $\binom{n}{r}$, $\quad$ (läses "n över r")

Rekursivt:

$$\begin{cases} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, & 0 < r < n \\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \end{cases}$$

Pascals triangel:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Sats: $\quad \binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Binomialsatsen: $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$