

(Diskret matte D, ht13: F7, må 16 sep 2013)

Transversaler

Om $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ är en uppsättning mängder, kallas en mängd $\{s_i\}_{i \in I}$ med $s_i \in S_i$ för alla $i \in I$ och $s_i \neq s_j$ om $i \neq j$ för en **transversal** för $\mathcal{S}$.

Halls sats handlade ursprungligen om transversaler och säger att om I är ändligt har $\mathcal{S}$ en transversal omm

$$|\bigcup_{i \in H} S_i| \geq |H| \text{ för alla } H \subseteq I.$$

(Ses genom att betrakta den bipartita grafen med $X = I$, $Y = \bigcup_{i \in I} S_i$ och kanter precis mellan varje $i \in I$ och alla element i S_i och använda giftermålsatsen.

Om alla S_i är ändliga gäller satsen också för oändliga I , men det har vi inte visat.)

Om maximala matchningar

Sats: Om M är en maximal matchning i en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ gäller $|M| = |X| - d(G)$, där $d(G) = \max_{A \subseteq X} (|A| - |J(A)|)$, grafens **underskott** eller **defekt**.

Sats: En matchning i en bipartit graf är maximal **omm** det inte finns någon utökande alternerande stig (dvs en alternerande stig med omatchade första och sista hörn) för M .

En algoritm för maximala matchningar

För att finna en maximal matchning i en bipartit graf:

För varje omatchat hörn $x \in X$:

Undersök alla alternerande stigar från x , tills en leder till ett omatchat hörn. Byt i M ut stigens M -kanter mot stigens andra kanter, få en matchning M' med $|M'| = |M| + 1$.

Upprepa så länge det går, dvs så länge någon alternerande stig från ett omatchat X -hörn leder till ett omatchat Y -hörn. (Om det inte finns någon sådan stig leder sökandet antingen in i cykler (så det behövs en spärr mot fortsatt sökande längs stigar som upprepar sig) eller stopp när det inte finns någon omatchad kant att följa.)