(Diskret matte D, ht13: F1, må 2 sep 2013)

Linjär rekursionsekvation med konstanta koefficienter,

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + c_0 a_n + f(n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

där $\{c_{k-1}, \ldots c_0\}$ är givna konstanter och $f(n)$ en given funktion.

Sökt är följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Homogen ekvation ($f(n) = 0$, alla n), allmän lösning:

$$a_n = P_1(n){r_1}^n + \cdots + P_j(n){r_j}^n$$

$r_1, \ldots, r_j$ de **olika** rötterna till **karakteristiska ekvationen**

$$x^k - c_{k-1}x^{k-1} - \cdots - c_0 = 0$$

med multipliciteter $m_1, \ldots, m_j$,
$P_i(n)$ godtyckliga polynom av grad $\leq m_i - 1$, $i = 1, \ldots, j$.

Inhomogen ekvation

$$a_n = a_n^{\text{hom}} + a_n^{\text{part}},$$

a_n^{hom}: den allmänna lösningen till den homogena ekvationen enligt ovan
a_n^{part}: en lösning ("partikulärlösning") till den inhomogena ekvationen. Den fås ofta med hjälp av en **ansats** (dvs en "begåvad gissning").

Om $f(n)$ är ett polynom, av formen α^n (α konstant) [speciellt $e^{i\omega n}$ (ω konstant) (så, med Re, Im, $\cos(\omega n)$, $\sin(\omega n)$)] eller en produkt av sådana, kan man ansätta en lösning av samma form, med koefficienter som bestäms genom insättning i ekvationen. Om en sådan funktion löser den homogena ekvationen måste ansatsen multipliceras med en potens av n.

Metoden att lösa linjära rekursionsekvationer med konstanta koefficienter är alltså mycket lik den för att lösa linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter, r^n här motsvarar $e^{\lambda x}$ där.

Som ett exempel betraktade vi **fibonaccitalen $(F_n)_{n=0}^{\infty}$** som definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0, \ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

så $F_n = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$ för $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ De ges av

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right), \text{ för } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

(Hur hänger de ihop med spelet "Fibonacci-nim"? Finns beskrivet på internet.)

I ett annat exempel införde vi den **genererande funktionen**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(egentligen en **formell summa**, inte en funktion, man behöver inte tänka på om summan är konvergent) och formulerade rekursionsekvationen för a_n som en (enkel) ekvation för $f(x)$.