

(F6, to 23 jan)

Axiom för $\mathbb{Z}$, heltalen (från Biggs):

Följande gäller för alla $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

- I0. $0, 1 \in \mathbb{Z}, 0 \neq 1$.
- I1. $a + b, ab \in \mathbb{Z}$.
- I2. $a + b = b + a, ab = ba$.
- I3. $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$.
- I4. $a + 0 = a, a1 = a$.
- I5. $a(b + c) = ab + ac$.
- I6. Det finns ett entydigt $-a \in \mathbb{Z}$ så att $a + (-a) = 0$.
- I7. Om $a \neq 0$ och $ab = ac$, så $b = c$.

- I8. $a \leq a$.
- I8 $\frac{1}{2}$. $a \leq b$ eller $b \leq a$.
- I9. $a \leq b$ och $b \leq a \Rightarrow a = b$.
- I10. $a \leq b$ och $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
- I11. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.
- I12. $a \leq b$ och $0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$.

- I13. Om $X \subseteq \mathbb{Z}, X \neq \emptyset$ och X har en undre begränsning (dvs det finns $m \in \mathbb{Z}$ så att för alla $x \in X$ gäller $m \leq x$), så finns ett minsta element i X . (**Välordningsaxiomet**)

Ur I13 följer **induktionsprincipen**:

Om $S \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ och

antingen

- i) $1 \in S$
- ii) $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$, alla $k \in \mathbb{N}$

eller

$\{n \in \mathbb{N} \mid n < k\} \subseteq S \Rightarrow k \in S$, alla $k \in \mathbb{N}$

Så är $S = \mathbb{N}$

Sats: Om $a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1$, finns entydigt $q, r \in \mathbb{Z}$ med $0 \leq r < b$ och $a = bq + r$.

Talet q kallas **kvoten** av a och b , r kallas **resten**

Delbarhet: $y \mid x$ betyder $x = yq$, något $q \in \mathbb{Z}$

Om $a, b \in \mathbb{Z}$ och

- i) $d \mid a, d \mid b$
- ii) $c \mid a, c \mid b \Rightarrow c \mid d$
- iii) $d \geq 0$

kallas d en **största gemensam delare**, sgd , till a och b .