

(F23, fr 21 feb)

Om $f(x)$ är ett polynom i $R[x]$ (R en ring),

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in R,$$

låter vi $f(x)$:s **grad**, $\deg f(x)$, vara det **största** n med $a_n \neq 0$ (om alla $a_n = 0$, dvs $f(x)$ är **nollpolynomet**, kan vi låta $\deg f(x)$ vara $-\infty$ (eller odefinierad)).

Om $f(x), g(x) \in R[x]$ gäller

$$\deg(f(x) + g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$$

$$\deg(f(x)g(x)) \leq \deg f(x) + \deg g(x)$$

Om $f(x), g(x) \in F[x]$, polynom över en **kropp** F :

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

$R[x]$ och $F[x]$ är **ringar**.

Sats: Om $a(x), b(x) \in F[x]$, $b(x) \neq 0$ (nollpolynomet), finns entydigt bestämda $q(x), r(x) \in F[x]$, $\deg r(x) < \deg b(x)$ med

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x)$$

Polynomdivision i $F[x]$, "vanliga algoritmen"

Delbarhet i $F[x]$: $g(x) \mid f(x)$ betyder $f(x) = g(x)h(x)$, för något $h(x) \in F[x]$

Om $a(x), b(x) \in F[x]$ och

i) $d(x) \mid a(x), d(x) \mid b(x)$

ii) $c(x) \mid a(x), c(x) \mid b(x) \Rightarrow c(x) \mid d(x)$

iii) $d(x)$ är **monadiskt**, dvs högstgradskoefficienten är 1

kallas $d(x)$ en (monadisk) **största gemensam delare** till $a(x)$ och $b(x)$,

$$d(x) = \text{sgd}(a(x), b(x)).$$

Sats: Om inte $a(x) = b(x) = 0$, existerar $\text{sgd}(a(x), b(x))$ entydigt och är $\lambda(x)a(x) + \mu(x)b(x)$, för några $\lambda(x), \mu(x) \in F[x]$

$d(x), \lambda(x), \mu(x)$ fås med **Euklides algoritm**:

$$a(x) = q_1(x)b(x) + r_1(x) \quad \deg r_1(x) < \deg b(x)$$

$$b(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \quad \deg r_2(x) < \deg r_1(x)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r_{k-3}(x) = q_{k-1}(x)r_{k-2}(x) + r_{k-1}(x) \quad \deg r_{k-1}(x) < \deg r_{k-2}(x)$$

$$r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x)$$

Då är $\text{sgd}(a(x), b(x)) = u \cdot r_{k-1}(x)$, för något $u \in F \setminus \{0\}$.

$U(F[x]) \approx F \setminus \{0\}$ (konstanta polynom)

$f(x) \in F[x]$ är **irreducibelt** om

$f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow$ precis en av $g(x) \in U(F[x])$ och $h(x) \in U(F[x])$

(Jämför primtal i $\mathbb{Z}$)

Sats: Varje $f(x) \in F[x]$ är en produkt av irreducibla polynom, eller konstant.

Sats: Om $r(x) \in F[x]$ är irreducibelt och $r(x) \mid s_1(x) \dots s_k(x)$ så $r(x) \mid s_i(x)$,
något i , $1 \leq i \leq k$

Sats: Om $f(x) = g_1(x) \dots g_r(x) = h_1(x) \dots h_s(x)$ i $F[x]$, med $g_i(x), h_j(x)$
irreducibla, så är $r = s$ och $g_i(x) = u_i h_{\pi(i)}(x)$, där $u_i \in U(F[x])$, $\pi \in S_r$

Faktorsatsen: Om $f(x) \in F[x]$:

$$(x - \alpha) \mid f(x) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \text{ i } F$$

Så polynom av grad $n \geq 0$ i $F[x]$ har högst n nollställen i F .