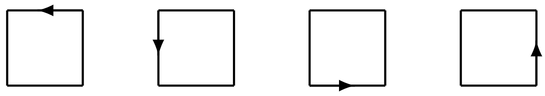
(F19, fr 14 feb ♡)

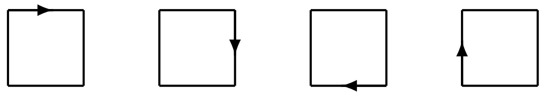
Ex. $G_\square$, **symmetrigruppen** för en **kvadrat**

Rotationer:



$i \qquad r \qquad r^2 \qquad r^3$

speglingar:



$x \qquad xr \qquad xr^2 \qquad xr^3$

(i är identitetsavbildningen. Figurerna visar bilden under motsvarande avbildning av kvadraten i ”standardläget”, det vid i ovan.)

Gruppen **genereras** av $\{x, r\}$, dvs varje element kan som ovan skrivas som $x^i r^j$ med $i \in \{0,1\},\ j \in \{0,1,2,3\}$. Gruppen beskrivs helt av **relationerna**

$$x^2 = r^4 = i, \quad rx = xr^3$$

Grupptabellen blir:

	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
i	i	r	r^2	r^3	x	xr	xr^2	xr^3
r	r	r^2	r^3	i	xr^3	x	xr	xr^2
r^2	r^2	r^3	i	r	xr^2	xr^3	x	xr
r^3	r^3	i	r	r^2	xr	xr^2	xr^3	x
x	x	xr	xr^2	xr^3	i	r	r^2	r^3
xr	xr	xr^2	xr^3	x	r^3	i	r	r^2
xr^2	xr^2	xr^3	x	xr	r^2	r^3	i	r
xr^3	xr^3	x	xr	xr^2	r	r^2	r^3	i

Slut på exemplet.

Ordningen $\begin{cases} \text{för en grupp } G \ : \ |G| \\ \text{för ett element } g \in G \ : \ o(g) \end{cases}$

$$o(g) = \begin{cases} \text{om } g^n = 1, \text{ något } n > 0 : \ \textbf{minsta} \text{ sådana } n \\ \text{annars : oändlig} \end{cases}$$

Sats : Om $o(x) = m$: $\quad x^s = 1 \Leftrightarrow m \mid s$

G är en **cyklisk grupp** om för något $x \in G$ varje $g \in G$ är x^n för något $n \in \mathbb{Z}$.

x **genererar** G, $\quad G = \langle x \rangle$,

$o(x) = m$: $\quad C_m = \{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$

$o(x) = \infty$: $\quad C_\infty = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, \dots\}$

Om A, B är grupper, är $(A \times B, *)$ med $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ också en grupp, den **direkta produkten** av A och B.

Enligt kinesiska restsatsen gäller om $sgd(m_i, m_j) = 1$ då $i \neq j$:

$$C_{m_1 \dots m_k} \approx C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_k}$$

H är en **delgrupp** till $(G, *)$ om $H \subseteq G$ och $(H, *)$ är en grupp.