

Sist
F7

Linjära rekursionsrelationer
med konstanta koefficienter

$$a_{n+k} = c_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + c_0 a_n + f(n), \quad n=0,1,\dots$$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sökes

$\{c_{k-1}, \dots, c_0\}$ givna konstanter

$f(n)$ given funktion

Homogen ekvation ($f(n)=0$, alla n)

allmän lösning $a_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_j(n) r_j^n$

där $r_1, \dots, r_j$ de olika rötterna till den

karaktéristiska ekvationen

$$x^k - c_{k-1} x^{k-1} - \dots - c_0 = 0$$

med multipliciteter $m_1, \dots, m_j$

$P_i(n)$ polynom av grad $\leq m_i - 1$

Inhomogen ekvation

allmän lösning

$$a_n = a_n^{\text{hom}} + a_n^{\text{part}}$$

↑ en lösning till inhomogena
allmänna lösningen till homogena

a_n^{part} fås ofta med ansats

Ex Fibonacci-talen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ger $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

En genererande funktion för följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{formellt})$$

(en transform)

Mästarsatsen

$$\text{Om } \begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) + F(n) \\ T(1) = d \end{cases}$$

så 1) om $F(n)$ växer långsammare än $n^{\log_b a}$:
 $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

2) om $F(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$:
 $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$

3) om $F(n)$ växer snabbare än $n^{\log_b a}$:
 $T(n) \in \Theta(F(n))$

[$f(n) \in \Theta(g(n))$ (då $n \rightarrow \infty$) :

det finns $N, A, B > 0$ s.d.

$$A|g(n)| < |f(n)| < B|g(n)|, \text{ alla } n > N]$$