

Sist

F3

Ett träd  $T = (V, E)$  är en

sammanhängande graf utan cykler

Dä:

- $x, y \in V \Rightarrow$  unik stig  $x \rightarrow y$  i  $T$

- Om en kant tas bort återstår två träd

- $|E| = |V| - 1$  (om  $|V| \geq 1$ )

En hörnfärgning av  $G = (V, E)$

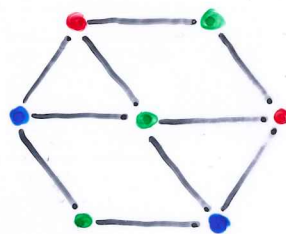
från  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$

så att  $x, y \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$

Kromatiska talet  $\chi(G)$ :

minsta antalet färger

$G$  kan hörnfärgas med



En gilig algoritm för att approximera  $\chi(G)$

1) ordna hörnen :  $v_1, v_2, \dots, v_n$

2) välj i ordning  $c(v_1), c(v_2), \dots$   
minsta möjliga givet de redan valda

Sats:  $G$  har maxvalens  $k \Rightarrow$

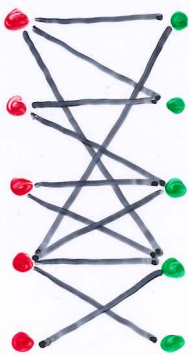
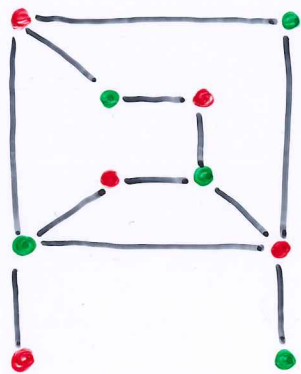
- $\chi(G) \leq k+1$

- om  $G$  sammanhängande, inte reguljär  
så  $\chi(G) \leq k$

( •  $G$  sammanhängande, inte  $K_n$ ,  $k \geq 3 \Rightarrow$   
 $\chi(G) \leq k$  )

En bipartit graf  $G = (X \cup Y, E)$

$X \cap Y = \emptyset$ , alla kanter mellan  $X$  och  $Y$



$G$  2- (hörn)färgbar

Sats: Om  $G$  är bipartit

$$\sum_{x \in X} \delta(x) = \sum_{y \in Y} \delta(y) = |E|$$

Sats:  $G$  är bipartit  $\Leftrightarrow$

det finns ingen udda cykel i  $G$

$G = (X \cup Y, E)$  har hamiltoncykel  $\Rightarrow |X| = |Y|$

" hamiltonstig  $\Rightarrow ||X| - |Y|| \leq 1$

Kromatiska polynomet  $P_G(\lambda)$  för  $G=(V,E)$   
antalet sätt hörfärpa  $G$  med högt  $\lambda$  färger

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$$

$$\circ P_{(V,\emptyset)}(\lambda) = \lambda^{|V|}$$

$G-e$ :  $G$  med kanten  $e$  borttagen

$G/e$ : " kontraherad

$\chi(G)$  är minsta  $\lambda = 0, 1, \dots$  med  $P_G(\lambda) \neq 0$

$P_G(\lambda)$  är ett polynom av grad  $|V|$ ,

med högstegradsterm  $\lambda^{|V|}$ ,

nästhögstegradsterm  $-|E|\lambda^{|V|-1}$

koefficienterna alternerande  $\geq 0, \leq 0$

Antalet sätt färpa med exakt  $\lambda$  färger:

$$\sum_{j=0}^{\lambda - \chi(G)} (-1)^j \binom{\lambda}{j} P_G(\lambda - j)$$