Matematik, KTH
Bengt Ek
Augusti 2012

Material till kursen SF1630 Diskret matematik för D3:

Om plana och planära grafer

I många sammanhang (t.ex. vid konstruktion av elektriska kretsar) är det intressant att veta om en viss graf kan ritas i planet utan att några kanter korsar varandra (kanterna behöver inte ritas som räta linjer, andra (snälla) kurvor är tillåtna).

Definition: En **plan graf** är en ”konkret graf” i ett plan, där hörnen är olika punkter i planet och kanterna är kurvor som förbinder sina hörn, utan att olika kanter korsar varandra (annat än i hörnen).

Definition: En graf $G = (V, E)$ är **planär** om den är isomorf med en plan graf.

G är alltså planär precis om den **kan** ritas (i ett plan) utan att några kanter korsar varandra. En graf kan mycket väl vara planär även om den är ritad med korsande kanter, huvudsaken är att det är *möjligt* att undvika korsningar.

Man kan förstås ställa sig frågan om en given graf går att rita utan korsande kanter på någon annan yta än ett plan. Om detta kan man läsa i litteraturen, vi noterar bara att det inte förändrar något om man betraktar en sfär i stället för ett plan:

En graf kan ritas utan korsande kanter **på en sfär** precis om den kan det **i ett plan**.

Om grafen är ritad i planet kan man nämligen ta en stor cirkel utanför grafen och ”dra ihop” den (men inte det som ligger innanför cirkeln) till en punkt. Detta ger en sfär med grafen ritad på sig. Omvänt kan en sfär med grafen ritad på sig ”öppnas” i en punkt som varken är ett hörn eller ligger på en kant. Detta ger en plan version av grafen.

Eulers polyederformel

Kanterna (och hörnen) i en plan graf delar in planet i sammanhängande områden, vilka vi för enkelhets skull kommer att kalla *ytor*. (Andra använda termer är delytor, regioner och fasetter.)
Om man ritar samma planära graf på olika sätt (som plana grafer) kan ytorna se olika ut. Följande sats, som är vårt huvudresultat, visar dock att **antalet** ytor (där vi räknar med den obegränsade ytan) är oberoende av hur grafen framställs som en plan graf.

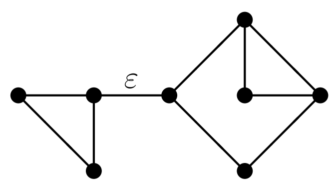
Sats:
Om en plan graf har v hörn, e kanter, r ytor och c komponenter, gäller

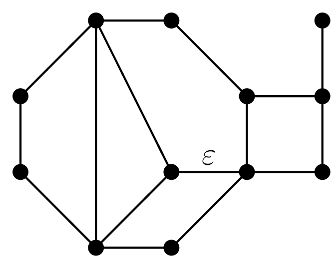
$$v - e + r - c = 1.$$

Om grafen är **sammanhängande** gäller speciellt (**Eulers polyederformel**)

$$v - e + r = 2.$$

Exempel:





$v - e + r - c = 8 - 10 + 4 - 1 = 1$

$v - e + r - c = 12 - 16 + 6 - 1 = 1$

Tillsammans (som en graf) $v - e + r - c = 20 - 26 + 9 - 2 = 1$

Namnet ”polyederformel” kommer av att Euler studerade konvexa polyedrar. De svarar (via projektion mot en punkt inuti) mot grafer på en sfär och därmed mot plana grafer. r är då antalet sidoytor hos polyedern. För en kub t.ex. får man $v - e + r = 8 - 12 + 6 = 2$, så det stämmer.

Bevis: Induktionsbevis, med induktion över e, antalet kanter.
Bas: Om $e = 0$ består grafen bara av v isolerade hörn, det finns bara en yta, $r = 1$, och varje hörn är en egen komponent, $c = v$, så $v - e + r - c = v - 0 + 1 - v = 1$. Basfallet är alltså klart.
Steg: Antag att påståendet stämmer för alla plana grafer med k kanter och betrakta en plan graf G med $e = k + 1$.
Bilda grafen G' genom att ta bort en kant ε (men inte något hörn) från G. Då har G och G' samma hörn, så $v' = v$, och G' har en kant mindre än G, så $e' = e - 1 = k$. Enligt induktionsantagandet är $v' - e' + r' - c' = 1$.
Fall 1: Ytorna på ömse sidor om ε är samma yta (som i den vänstra grafen ovan), dvs det finns en kurva i planet som utan att korsa någon kant eller något hörn i G förbinder ε:s båda sidor. Komponenten i G som innehöll ε har då delats upp i två komponenter i G', men ytorna är lika många. Man har alltså $r' = r$ och $c' = c + 1$, så i detta fall fås $v - e + r - c = v' - (e' + 1) + r' - (c' - 1) = v' - e' + r' - c' = 1$, så påståendet gäller för G.
Fall 2: Ytorna på ömse sidor om ε är olika ytor (som i den högra grafen ovan), så de förenas till en när kanten tas bort, $r' = r - 1$. Om vi följer

kanterna längs en av ytorna ”åt andra hållet” (bort från ε) får vi en stig som förbinder hörnen i ε:s ändar. Eftersom vi inte är i fall 1, är detta en stig i G', så G' har lika många komponenter som G, $c' = c$. I detta fall fås alltså $v-e+r-c = v'-(e'+1)+(r'+1)-c' = v'-e'+r'-c' = 1$, så påståendet gäller åter för G.
Därmed är också induktionssteget klart och påståendet följer.

Som man kan se av beviset, gäller formeln i satsen för allmänna grafer (även med öglor och multipla kanter). Man kan till och med tillåta ”fria kanter” utan hörn, dvs slutna kurvor (som komponenter räknas dock bara sammanhängande delar som innehåller minst ett hörn).

Följder av polyederformeln

Eulers polyederformel kan användas för att finna nödvändiga villkor för att en graf skall vara planär. Eftersom v, e och c är oberoende av hur vi ritar grafen, söker vi uttrycka villkoren i dem genom att eliminera r.
För en enkel plan graf (utan öglor och multipla kanter, dvs en sådan graf som vi sysslar med) gäller att varje yta måste ha minst tre kanter. (Med ett undantag, faktiskt. Om grafen bara innehåller en kant, som t.ex. K_2, har den enda ytan bara två kanter (som är samma räknad två gånger). Vi kräver därför att $e \geq 2$.) Om vi tänker oss att ”dela kanterna på längden” kan vi till varje yta föra minst $\frac{3}{2}$ kanter, så $e \geq \frac{3}{2}r$ (det är samma typ av resonemang som när man visar ”handslagslemmat”).

Vi får för en plan (enkel) graf $r \leq \frac{2}{3}e$, så $1 = v - e + r - c \leq v - \frac{1}{3}e - c$, dvs $3v \geq e + 3(c+1)$, så

Följdsats 1:
För en planär graf med v hörn, e kanter och c komponenter gäller om $e \geq 2$

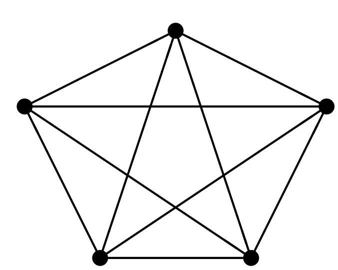
$$3v \geq e + 3(c+1).$$

Om grafen är **sammanhängande** ($c = 1$) gäller speciellt

$$3v \geq e + 6.$$

Likhet gäller precis om alla ytor (även den obegränsade ytan) har exakt tre kanter (för en, och därmed alla, plana versioner av grafen).

Exempel:
Grafen K_5 är sammanhängande och har $v = 5$, $e = 10$, så $3v = 15$, $e + 6 = 16$, olikheten i satsen är inte uppfylld, så
Den fullständiga grafen K_5 är inte planär.



För en **bipartit** graf vet vi att alla cykler har jämn längd, så varje yta i en bipartit, enkel plan graf har minst fyra kanter (liksom nyss krävs $e \geq 2$). Så på samma sätt som ovan fås att $e \geq 2r$, dvs $r \leq \frac{1}{2}e$, så $1 = v-e+r-c \leq v-\frac{1}{2}e-c$, alltså $2v \geq e + 2(c+1)$, så

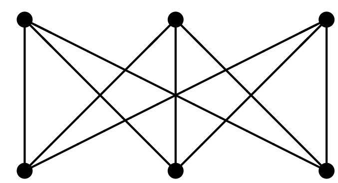
Följdsats 2:
För en bipartit, planär graf med v hörn, e kanter och c komponenter gäller om $e \geq 2$

$$2v \geq e + 2(c+1).$$

Om grafen är **sammanhängande** ($c = 1$) gäller speciellt

$$2v \geq e + 4.$$

Exempel:
Den bipartita grafen $K_{3,3}$ är sammanhängande och har $v = 6$, $e = 9$, så $2v = 12$, $e + 4 = 13$, olikheten i satsen är inte uppfylld, så
Den fullständiga bipartita grafen $K_{3,3}$ är inte planär.



En följd till
Ur följdsats 1 och handslagslemmat får man $6v \geq 2e+6(c+1) = \sum_{x\in V}\delta(x) + 6(c+1) > \sum_{x\in V}\delta(x)$. Eftersom $\frac{1}{v}\sum_{x\in V}\delta(x)$ är medelvärdet av hörnens valenser får vi att **för en planär (enkel) graf är medelvärdet av hörnens valenser** < 6. Speciellt finns det alltid **minst ett hörn av valens** ≤ 5.

Kuratowskis sats om planaritet
I själva verket är K_5 och $K_{3,3}$ de enda hindren för planaritet, varje graf som är icke-planär innehåller minst en av K_5 och $K_{3,3}$. Här kan ”innehåller” tolkas på två sätt:

Kuratowskis sats (1930): Grafen G är icke-planär **omm** en graf som är isomorf med K_5 eller $K_{3,3}$ kan fås från en delgraf till G genom att ”sudda ut” ett antal (0 eller fler) hörn med valens 2 (och bevara en kant mellan deras grannar).

Wagners sats (1937): Grafen G är icke-planär **omm** en graf som är isomorf med K_5 eller $K_{3,3}$ kan fås från en delgraf till G genom att kontrahera ett antal (0 eller fler) kanter (”dra ihop” hörnen vid kanten till ett nytt hörn).

En delgraf till G är förstås en graf som kan fås från G genom att ta bort ett antal (0 eller fler) hörn och deras kanter och ett antal (0 eller fler) kanter.

Villkoret i Wagners sats kallas att K_5 eller $K_{3,3}$ är en **minor** till G. Man vet att det för varje yta finns ett ändligt antal grafer så att grafen G kan ritas på ytan utan korsande kanter omm ingen av dem är en minor till G. För sfären är antalet alltså 2. För torusen är antalet okänt, men det är minst 16000(!).

Vi visar inte Kuratowskis och Wagners satser här, utan hänvisar till litteraturen. Satsen om det ändliga antalet förbjudna minorer är djup (beviset utnyttjar en sats som Robertson och Seymour formulerade 1987, men avslutade beviset för först 2004).

Regelbundna polyedrar

Vi skall se vilka möjligheter som finns för en sammanhängande, plan ”dubbelt reguljär” graf. Med detta menar vi här att alla hörn har samma valens, $n \geq 3$, (dvs grafen är n-reguljär) och alla ytor (också den obegränsade ytan) har samma antal, $m \geq 3$, kanter.
En **regelbunden polyeder** är en konvex polyeder med alla sidoytor regelbundna m-hörningar och alla hörn kongruenta. Det är sedan antiken känt att de enda regelbundna polyedrarna är de **platonska kropparna**, tetraedern, hexaedern (kuben), oktaedern, dodekaedern och ikosaedern. Den plana graf som svarar mot en regelbunden polyeder är dubbelt reguljär och vi skall se att de villkor för v, e, r, m, n som gäller för en plan graf räcker för att visa att de platonska värdena är de enda möjliga.

Som i förra avsnittet har man

$$v - e + r = 2, \qquad 2e = nv = mr.$$

Detta ger

$$2 = \tfrac{2e}{n} - e + \tfrac{2e}{m} = (2m - mn + 2n)\tfrac{e}{mn}$$

och det måste gälla att $2m - mn + 2n > 0$, vilket är detsamma som att

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

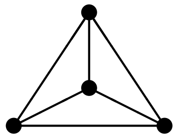
Eftersom $m, n \geq 3$ blir de enda möjligheterna

m	n	v	e	r	platonsk kropp
3	3	4	6	4	tetraeder
3	4	6	12	8	oktaeder
3	5	12	30	20	ikosaeder
4	3	8	12	6	hexaeder
5	3	20	30	12	dodekaeder

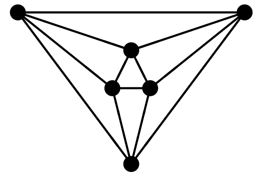
v, e, r fås här från uttrycken ovan:

$$e = \frac{2mn}{4 - (m-2)(n-2)}, \; v = \frac{2e}{n}, \; r = \frac{2e}{m}.$$

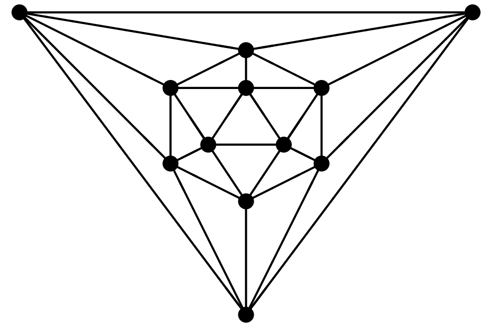
Figurerna visar ”dubbelt reguljära” plana grafer som motsvarar var och en av de möjliga kropparna:



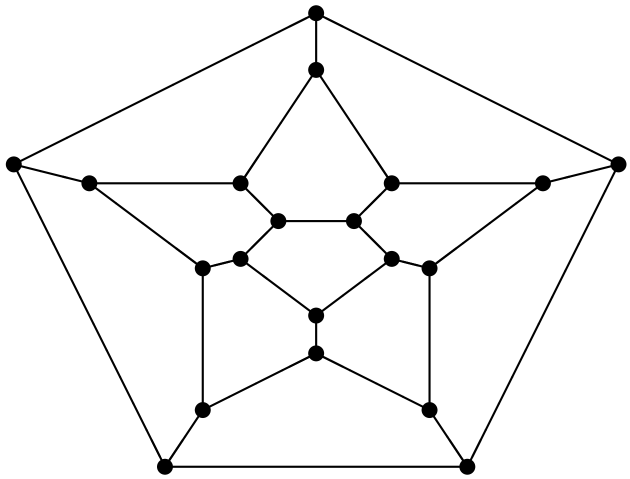
"Tetraeder"
$m = n = 3$



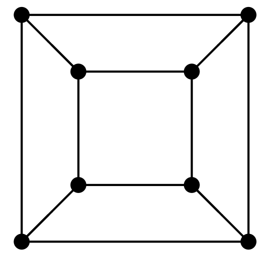
"Oktaeder"
$m = 3, n = 4$



"Ikosaeder"
$m = 3, n = 5$



"Dodekaeder"
$m = 5, n = 3$



"Hexaeder"
$m = 4, n = 3$

Fyrfärgssatsen

En hypotes som länge var obevisad är att för varje karta (plan eller på en sfär) räcker fyra färger för att färga länderna (som förutsätts sammanhängande) så att två länder som har en gemensam gräns alltid har olika färger. Hypotesen formulerades redan 1852, blev spridd 1878 och bevisades (med stor användning av dator i beviset) först 1976.
När fyrfärgssatsen formuleras i grafteoretiska termer uttrycks den oftast inte för grafen som har gränserna som kanter och länderna som ytor, utan för den **duala grafen** med länderna som hörn och kanter mellan länder som har en gemensam gräns. Varje plan graf kan fås som dual till en karta, så satsen kan formuleras:

Sats Om grafen G är planär är $\chi(G) \leq 4$.

Beviset är mycket (förvånansvärt?) omfattande, vi hoppar över det.
I stället skall vi se hur följande (enklare!) sats (**sexfärgssatsen**) direkt följer ur det vi visat om planära grafer:

Sats Om grafen G är planär är $\chi(G) \leq 6$.

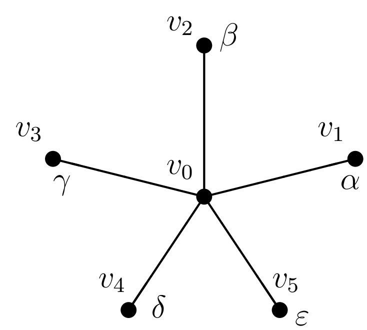
Bevis: Induktionsbevis, med induktion över v, antalet hörn i G.
Bas: Om $v = 1$ kan grafen förstås färgas med en färg, $\chi(G) = 1 \leq 6$, så basfallet är klart.

Steg: Antag att påståendet är sant för $v = k$, dvs att alla planära grafer med k hörn kan färgas med högst 6 färger.
Låt G ha $k+1$ hörn, vi skall med hjälp av induktionsantagandet visa att också G kan färgas med högst 6 färger.
Eftersom G är planär, har den (enligt exemplet i avsnittet om följder av polyederformeln) ett hörn med valens < 6. Låt G' vara grafen G med det hörnet och alla kanter till det borttagna. G' har då k hörn och kan enligt antagandet färgas med högst 6 färger. Genom att färga det återstående hörnet i G med en färg som inte använts för dess högst 5 grannar, får vi en färgning av G med högst 6 färger.
Därmed är induktionssteget klart och påståendet följer.

Även **femfärgssatsen** kan bevisas på liknande (men lite krångligare) sätt:

Sats Om grafen G är planär är $\chi(G) \leq 5$.

Bevis: Induktion över antalet hörn, som i beviset ovan.
Bas: Som ovan.
Steg: Som ovan tas ett hörn med valens ≤ 5 (vi kallar det v_0) bort och resten, G', färgas med högst 5 färger. Om v_0:s grannar använder högst 4 färger kan v_0 tydligen ges en ledig färg och steget är klart i det fallet. Om v_0 har fem grannar och färgningen av G' ger dem alla olika färger, går det att *modifiera* färgningen av G' så att två av grannarna får samma färg. Om vi visar det följer induktionssteget och beviset av satsen är då klart.



Antag alltså att v_0 har 5 grannar (i ordning $v_1, \ldots, v_5$) som i färgningen av G' fått färgerna $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, se fig. (hörnen $v_1, \ldots, v_5$ kan förstås ha fler kanter, inbördes och till resten av G').
Om det går en $\alpha\gamma$-stig (dvs en stig vars alla hörn har färg α eller γ (alternerande förstås)) mellan v_1 och v_3, kan det inte gå någon $\beta\delta$-stig mellan v_2 och v_4, eftersom G' är plan och sådana stigar inte kan korsa varandra.
I så fall kan vi byta färg, δ mot β och β mot δ, för alla hörn som kan nås med en $\beta\delta$-stig från v_4. Detta ger tydligen en ny tillåten färgning av G', där både v_2 och v_4 har färgen β. I det motsatta fallet, att det inte finns någon $\alpha\gamma$-stig mellan v_1 och v_3 kan färgningen på motsvarande sätt ändras så att både v_1 och v_3 har färgen α. Saken är klar.

Stigar ($\alpha\gamma$- och $\beta\delta$-) som de i beviset brukar kallas **kempekedjor** efter Alfred Kempe som använde dem i ett "bevis" för fyrfärgssatsen 1879 (vilket först 1890 visades vara felaktigt).
Ett alternativ till beviset med kempekedjor är att, om v_0 har 5 grannar, notera att det finns två av $v_1, v_2, \ldots, v_5$ som inte är grannar (eftersom K_5 inte är planär). Låt G'' vara G' med de två icke-grannhörnen identifierade. G'' är planär (inga kantkorsningar uppstår i en plan ritning av G om de två hörnen båda "rör sig" in till v_0) och har färre hörn än G. En femfärgning av den (finns enligt induktionsantagandet) ger en av G' där v_0:s grannar använder högst fyra färger.

Beviset av fyrfärgssatsen grundar sig på samma grundläggande induktion, men

man finner en mer komplicerad mängd av **oundvikliga konfigurationer** så att någon av dem måste finnas i varje planär graf (motsvarande konfigurationen med ett hörn av valens ≤ 5 ovan) och visar att var och en av dem är **reducibel**, dvs att en färgning av grafen med den borttagen leder till en färgning av hela grafen (motsvarande induktionssteget ovan).
I det ursprungliga beviset för fyrfärgssatsen från 1976 användes 1936 oundvikliga konfigurationer och stora delar av beviset att dessa alla är reducibla genomfördes av en dator. Senare har antalet konfigurationer kunnat förbättras till 633 stycken. Fortfarande är datorn dock nödvändig för att genomföra beviset (på rimlig tid).

Övningar

1. I en sammanhängande plan graf har alla hörn valens 3 eller 5. Antalet hörn är 12 och antalet ytor är 11. Hur många hörn har valens 3 och hur många har valens 5?

2. I en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf har alla ytor antingen 4 eller 6 kanter (också den obegränsade ytan). Hur många ytor har 4 kanter?

3. För vilka $n \in \mathbb{N}$ är den fullständiga grafen K_n planär?

4. För vilka $m, n \in \mathbb{N}$ är den fullständiga bipartita grafen $K_{m,n}$ planär?

Svar

1. 9 resp. 3
2. 6 st
3. För $n = 1, 2, 3, 4$.
4. För alla m, n med $m < 3$ eller $n < 3$ (eller båda).