

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Vad är $U(\mathbb{Z}[i])$?

R: $\{1, -1\}$, G: $\mathbb{Z}$, B: $\{1, i, -1, -i\}$

2. Är $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ en kropp?

$$(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.)$$

R: Ja, G: Kanske, B: Nej

3. Vad är $(3x + 4)(4x + 3)$ i $\mathbb{Z}_{12}[x]$?

R: $3x^2 + 4x + 5$, G: x^2 , B: x

4. Vad är $(2x + 1)^2$ i $\mathbb{Z}_4[x]$?

R: $x^2 + x + 1$, G: 1, B: $x^2 + 1$

5. Vad är $(2x + 1)^2$ i $\mathbb{Z}_3[x]$?

R: $x^2 + x + 1$, G: 1, B: $x^2 + 1$

6. Är $P_m : \mathbb{Z}_m[x] \rightarrow \mathbb{Z}_m[x]$ ($m \geq 2$)

given av $P_m(f(x)) = (f(x))^m$ linjär?

R: ja, alltid, G: bara ibland, B: nej, aldrig

Svar:

1. B, ty alla $\pm 1, \pm i$ och inga andra har inverser i $\mathbb{Z}[i]$ (eftersom $|z^{-1}|^2 = \frac{1}{|z|^2}$, måste $|z| = 1$ om $z, z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$).
2. R, ty $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +)$ är en delgrupp till den abelska $(\mathbb{C}, +)$,
 $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}, \cdot)$ är en delgrupp till den abelska $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
(sluten under multiplikativ invers, ty $(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ om inte $a = b = 0$).
och de distributiva lagarna följer från dem i $\mathbb{C}$.
3. B, ty $(3x + 4)(4x + 3) = 12x^2 + 25x + 12 = x$ i $\mathbb{Z}_{12}[x]$.
4. G, ty $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 1$ i $\mathbb{Z}_4[x]$.
5. R, ty $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = x^2 + x + 1$ i $\mathbb{Z}_3[x]$.
6. G, ty om p är ett primtal är $(f(x))^p = f(x^p)$ i $\mathbb{Z}_p[x]$
(linjär, ty $P_p(af(x) + bg(x)) = af(x^p) + bg(x^p) = aP_p(f(x)) + bP_p(g(x))$),
men $P_4(x) = x^4$, $P_4(2x) = 2^4x^4 = 0 \neq 2P_4(x)$ i $\mathbb{Z}_4[x]$,
så P_m är inte linjär för alla $m \geq 2$.