Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. **Vad är $\phi(18)$?**

   R: 6, G: 9, B: 12

2. **För vilka $m \in \mathbb{Z}_+$ är $\phi(2m) = 2\phi(m)$?**

   R: Alla, G: Alla udda, B: Alla jämna

3. **För vilka $m, n \in \mathbb{Z}_+$ gäller**
   $$\phi(m)\phi(n) = \phi(\mathrm{sgd}(m,n))\phi(\mathrm{mgm}(m,n))?$$

   R: Alla, G: Några, inte alla, B: Inga

4. **Vad är $18 \cdot \sum_{d|18} \frac{\mu(d)}{d}$?**

   R: 4, G: 6, B: 8

5. **Den cykliska C_{120} har delgrupperna $H_1 \approx C_6$ och $H_2 \approx C_{10}$. Vilken är $H_1 \cap H_2$ isomorf med?**

   R: C_2, G: C_{16}, B: C_{30}

6. **C_{120} har delgrupperna $H_1 \approx C_6$ och $H_2 \approx C_{10}$. Vilken är $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ (genererad av H_1, H_2) isomorf med?**

   R: C_4, G: C_{30}, B: C_{60}

Svar:

1. R, ty $\phi(18) = |\{1,5,7,11,13,17\}| = 6 (= 18 \cdot (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}))$ (och $18 = 2 \cdot 3^2$).
2. B, ty för u udda: $\phi(2 \cdot 2^k u) = \phi(2^{k+1})\phi(u) = 2^k \phi(u)$ (ϕ multiplikativ) och $\phi(2^k u) = \begin{cases} 2^{k-1}\phi(u), & k \geq 1, \\ \phi(u), & k = 0, \end{cases}$ så $\phi(2 \cdot 2^k u) = 2\phi(2^k u)$ omm $k \geq 1$, dvs omm $m = 2^k u$ är jämnt.
3. R, ty $m \cdot n = \mathrm{sgd}(m,n) \cdot \mathrm{mgm}(m,n)$ och då dess led för varje primtal p multipliceras med $(1-\frac{1}{p})^a$, där a är antalet av m och n som p delar (0, 1 eller 2) fås $\phi(m)\phi(n)$ respektive $\phi(\mathrm{sgd}(m,n))\phi(\mathrm{mgm}(m,n))$.
4. G, ty $18 \cdot \sum_{d|18} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|18} \mu(d)\frac{18}{d} = \phi(18) = 6$ (eftersom $\phi = \mu * id$ ($\Leftarrow 1 * \phi = id$)).
5. R, ty H_1, H_2 har (enligt känd sats om cykliska grupper) delgrupper isomorfa med C_d för alla $d \in \mathbb{Z}_+$ med $d \mid 6$ respektive $d \mid 10$.
   C_{120} har (samma sats) precis en delgrupp isomorf med C_d för alla $d \in \mathbb{Z}_+$ med $d \mid 120$. $H_1 \cap H_2$ är den största gemensamma delgruppen till H_1 och H_2, så den är isomorf med $C_{\mathrm{sgd}(6,10)} = C_2$.
6. G, ty $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ är den minsta delgrupp till C_{120} som innehåller H_1 och H_2, så isomorf med C_d för det minsta $d \in \mathbb{Z}_+$ med $d \mid 120$ och $6, 10 \mid d$, dvs $d = \mathrm{mgm}(6,10) = 30$.