

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Om G är gruppen av rotationssymmetrier för en oktaeder, vad är $|G_x|$ och $|Gx|$ då x är ett hörn i oktaedern?

R: 4 och 6, G: 6 och 4, B: 6 och 6

2. Samma fråga då x är mittpunkten av en kant.

R: 1 och 12, G: 2 och 12, B: 2 och 6

3. Vad är $|G|$ för G i fråga 1 och 2?

R: 6, G: 12, B: 24

4. På hur många sätt kan kanterna av en oktaeder färgas med k färger?

R: $\frac{1}{24}(k^{12} + 6k^8 + 11k^6 + 6k^3)$,

G: $\frac{1}{24}(k^{12} + 6k^8 + 3k^6 + 6k^4 + 8k^3)$,

B: $\frac{1}{24}(k^{12} + 6k^7 + 3k^6 + 8k^4 + 6k^3)$

Svar:

1. R, ty det finns fyra symmetrirotationer (inklusive identitetsrotationen) som inte flyttar hörnet, så $|G_x| = 4$, och hörnet kan roteras till vart och ett av de sex hörnen och inte till någon annan punkt av en symmetrirotation, så $|Gx| = 6$.

2. G, ty som i 1., men bara två symmetrirotationer lämnar kantens mittpunkt fix, så $|G_x| = 2$, och den kan symmetriroteras till vilken av de tolv kanternas mittpunkt som helst, så $|Gx| = 12$.

3. B, ty $|G| = |Gx| \cdot |G_x| = 6 \cdot 4 = 12 \cdot 2 = 24$

4. B, ty med Burnsidess lemma:

Symmetrigruppen har enligt 3. 24 element (samma som den duala kubens symmetrier),

identitetsrotationen id ,

6 rotationer $\frac{\pi}{2}$ kring axlar genom motsatta hörn $rot_{hh\frac{\pi}{2}}$,

3 rotationer π kring axlar genom motsatta hörn $rot_{hh\pi}$,

6 rotationer π kring axlar genom mittpunkter av motsatta kanter rot_{kk} och

8 rotationer $\frac{2\pi}{3}$ kring axlar genom mittpunkter av motsatta sidor rot_{ss} .

$|F(g)|$, antalet konfigurationer som inte ändras av g för de olika $g \in G$ blir k antalet banor då $\langle g \rangle$ verkar på kanterna.

g	antal sådana	$ F(g) $
id	1	k^{12} (då id verkar på kanterna, har varje bana 1 kant)
$rot_{hh\frac{\pi}{2}}$	6	k^3 (3 banor, alla består av 4 kanter)
$rot_{hh\pi}$	3	k^6 (6 banor, alla består av 2 kanter)
rot_{kk}	6	k^7 (7 banor, 2 består av 1 kant, övriga av 2)
rot_{ss}	8	k^4 (4 banor, alla består av 3 kanter)

Så antalet olika färgningar = antalet banor då G verkar på färgningarna =

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{24} (1 \cdot k^{12} + 6 \cdot k^3 + 3 \cdot k^6 + 6 \cdot k^7 + 8 \cdot k^4) =$$

$$= \frac{1}{24} (k^{12} + 6k^7 + 3k^6 + 8k^4 + 6k^3).$$