

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Den cykliska C_{120} har delgrupperna $H_1 \approx C_6$ och $H_2 \approx C_{10}$. Vilken är $H_1 \cap H_2$ isomorf med?

R: C_2 , G: C_{16} , B: C_{30}

2. C_{120} har delgrupperna $H_1 \approx C_6$ och $H_2 \approx C_{10}$. Vilken är $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ (genererad av H_1, H_2) isomorf med?

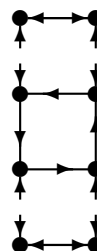
R: C_4 , G: C_{30} , B: C_{60}

3. Om G är en ändlig grupp och $p \mid |G|$ (p ett primtal), är då $|\{g \in G \mid o(g) = p\}| + 1 \equiv_p 0$?

R: Ja, säkert, G: Kanske, B: Nej, säkert inte

4. För vilken grupp är detta en cayleygraf?

R: C_8 , G: $G_{\square}$, B: Ingen



5. Om $N \triangleleft G$ (dvs N är en normal delgrupp till G) och $g \in G$, är $\varphi : N \rightarrow N$ med $\varphi(n) = gng^{-1}$ en automorfi?

R: Ja, säkert, G: Kanske, B: Nej, säkert inte

Svar:

1. R, ty H_1, H_2 har (enligt känd sats om cykliska grupper) delgrupper isomorfa med C_d för alla $d \in \mathbb{Z}_+$ med $d \mid 6$ respektive $d \mid 10$.
 C_{120} har (samma sats) precis en delgrupp isomorf med C_d för alla $d \in \mathbb{Z}_+$ med $d \mid 120$. $H_1 \cap H_2$ är den största gemensamma delgruppen till H_1 och H_2 , så den är isomorf med $C_{\text{sgd}(6,10)} = C_2$.
2. G, ty $H = \langle H_1, H_2 \rangle$ är den minsta delgrupp till C_{120} som innehåller H_1 och H_2 , så isomorf med C_d för det minsta $d \in \mathbb{Z}_+$ med $d \mid 120$ och $6, 10 \mid d$, dvs $d = \text{mgm}(6, 10) = 30$.
3. R, ty enligt beviset av Cauchys sats gäller $p \mid |\{g \in G \mid g^p = e\}|$ och alla $g \in G$ med $g^p = e$ **utom** e har $o(g) = p$ ($o(g) \mid p$ ger $o(g) = 1$ eller p).
4. B, ty elementet som ges av heldragen pil kan inte både ha ordning 2 och 4.
5. R, ty $\varphi : N \rightarrow N$ (definierad, ty $N \triangleleft G$) är en bijektion
($gn_1g^{-1} = gn_2g^{-1} \Rightarrow n_1 = n_2$, så injektion, $g(g^{-1}ng)g^{-1} = n$, så surjektion)
och $\varphi(n_1n_2) = g(n_1n_2)g^{-1} = gn_1g^{-1}gn_2g^{-1} = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$.