

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Är alla cykliska grupper av samma ordning isomorfa?

R: Ja, G: Delvis, B: Nej

2. Vad är $\log_7 4$ i $\mathbb{Z}_{11}$?

R: $3 \in \mathbb{Z}_5$, G: $6 \in \mathbb{Z}_{10}$, B: $9 \in \mathbb{Z}_{11}$

3. Vilken är en (icke-trivial) direkt produkt av grupper?

R: $(\mathbb{R}^3, +)$, G: $(G_\Delta, \circ)$, B: $(S_n, \circ)$

4. Vilken är en delgrupp?

R: $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$,

G: $\{i, r\} \subseteq G_\Delta$,

B: $\{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4$

Svar:

1. R, ty om två cykliska grupper genereras av g och h (med $o(g) = o(h)$) ges en isomorfi av $g^i \mapsto h^i$ för alla $i \in \mathbb{Z}$.
(Eftersom $o(g) = o(h)$ definierar detta en bijektion mellan $\langle g \rangle$ och $\langle h \rangle$. Den är en isomorfi.)
2. G, ty $o(7) = 10$ i $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}, \cdot)$ ($7^2 = 49 = 5$, $7^3 = 35 = 2$, $7^4 = 3$, $\dots$, $7^{10} = 1$ i $\mathbb{Z}_{11}$), så $\log_7 3 \in \mathbb{Z}_{10}$ och $7^6 = (7^3)^2 = 2^2 = 4$ i $\mathbb{Z}_{11}$.
3. R, ty i $(\mathbb{R}^3, +)$ ges addition av $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.
Inte S_3 , ty $|S_3| = 6$, enda grupperna med 2, 3 element är C_2 , C_3 och $C_2 \times C_3$ är (till skillnad från S_3) abelsk. $G_\Delta \approx S_3$.
4. RB, ty R: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ och $\det A = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = 1$, så sluten under produkt och invers, så en delgrupp,
B: ändlig och sluten under produkt, så delgrupp (sluten under invers ses också),
inte G: $r^2 = s \notin \{i, r\}$, så inte delgrupp.