

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Vad är $\phi(18)$?

R: 6, G: 9, B: 12

2. För vilka $m \in \mathbb{Z}_+$ är $\phi(2m) = 2\phi(m)$?

R: Alla, G: Alla udda, B: Alla jämna

3. För vilka $m \in \mathbb{Z}_+$ är $\phi(2m) = \phi(m)$?

R: Alla, G: Alla udda, B: Alla jämna

4. För vilka $m, n \in \mathbb{Z}_+$ gäller

$$\phi(m)\phi(n) = \phi(\text{sgd}(m, n))\phi(\text{mgm}(m, n))?$$

R: Alla, G: Några, inte alla, B: Inga

5. Är möbiusfunktionen $\mu(n)$ en multiplikativ funktion?

R: Ja, G: I viss mån, B: Nej

6. Vad är $18 \cdot \sum_{d|18} \frac{\mu(d)}{d}$?

R: 4, G: 6, B: 8

Svar:

1. R, ty $\phi(18) = |\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}| = 6 (= 18 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}))$ (och $18 = 2 \cdot 3^2$).
2. B, ty för u udda: $\phi(2 \cdot 2^k u) = \phi(2^{k+1})\phi(u) = 2^k \phi(u)$ (ϕ multiplikativ) och
$$\phi(2^k u) = \begin{cases} 2^{k-1} \phi(u), & k \geq 1, \\ \phi(u), & k = 0, \end{cases}$$
så $\phi(2 \cdot 2^k u) = 2\phi(2^k u)$ omm $k \geq 1$, dvs omm $m = 2^k u$ är jämnt.
3. G, ty $k = 0$ (så $m = u$, udda) i 2. ger $\phi(2m) = \phi(2u) = 2^0 \phi(u) = \phi(m)$.
($\phi(m) \geq 1$, så $2\phi(m) \neq \phi(m)$, för alla $m \in \mathbb{Z}_+$ och 2. ger $\phi(2m) \neq \phi(m)$ för jämna m .)
4. R, ty $m \cdot n = \text{sgd}(m, n) \cdot \text{mgm}(m, n)$ och då dess led för varje primtal p multipliceras med $(1 - \frac{1}{p})^a$, där a är antalet av m och n som p delar (0, 1 eller 2) fås $\phi(m)\phi(n)$ respektive $\phi(\text{sgd}(m, n))\phi(\text{mgm}(m, n))$.
5. R, ty om $\text{sgd}(m, n) = 1$ är $\mu(mn) = \begin{cases} 0, & \text{om } \mu(m)\mu(n) = 0, \\ (-1)^{r+s}, & \text{om } \mu(m) = (-1)^r, \mu(n) = (-1)^s. \end{cases}$
(Om minst en respektive ingen av m och n har någon upprepad primfaktor.
I det senare fallet är r, s antalen olika primfaktorer i m, n och $r + s$ antalet i mn .)
6. G, ty $18 \cdot \sum_{d|18} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|18} \mu(d) \frac{18}{d} = \phi(18) = 6$ (eftersom $\phi = \mu * id$ ($\Leftarrow 1 * \phi = id$)).