

Vilket svar är rätt?

R: röd, G: grön, B: blå

1. Låt $M_0 = \{1, 2, \dots\}$,
 $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1, 2, 3\}$, $\dots$

a. Har $\{M_i\}_{i=0}^\infty$ någon transversal?

R: ja, G: nej, B: vet ej

b. Uppfyller $\{M_i\}_{i=0}^\infty$ villkoret i Halls sats?

R: ja, G: nej, B: vet ej

c. Hur kan det vara möjligt?

R: Antalet mängder i Halls sats måste vara ändligt,

G: Mängderna i Halls sats måste vara ändliga,

B: Minst endera (av de föregående) måste gälla

Svar:

- 1a. G, ty för $i = 1, 2, \dots$ måste M_i representeras av i ,
så M_0 får ingen representant.
- 1b. R, ty för $H \subseteq \mathbb{N}$: om $|H| = \infty$ eller $0 \in H$ är $|\bigcup_{i \in H} M_i| = \infty \geq |H|$,
annars $|\bigcup_{i \in H} M_i| = |M_{\max_{i \in H} \{i\}}| = \max_{i \in H} \{i\} \geq |H|$ ($M_i \subset M_j$ om $0 < i < j$).
(I själva verket handlar villkoret om $|H| < \infty$.)
- 1c. B, ty låt det handla om $\{M_i\}_{i \in I}$.
Om $|I| < \infty$ kan man för varje $i \in I$ med $|M_i| = \infty$ finna $m_i \in M_i$ med
 $m_i \neq m_j$ om $|M_i|, |M_j| = \infty$, $i \neq j$ och $m_i \notin M_k$ då $|M_k| < \infty$,
så Halls sats för det ändliga fallet ger resultatet.
Om $|M_i| < \infty$ för alla $i \in I$ (men kanske $|I| = \infty$) kan man visa att
 $|\bigcup_{i \in H} M_i| \geq |H|$ för alla ändliga $H \subseteq I$ medför att en transversal finns,
men beviset för utanför vår kurs.

Här är för den verkligt intresserade en mycket kortfattad beskrivning av hur man kan visa det:
Vi använder en sats som är grundläggande i den gren av logiken som kallas **modellteori**,

Kompakthetssatsen: Om det för en mängd sentenser Γ gäller att varje **ändlig** $\Gamma' \subseteq \Gamma$ har en
modell (dvs en tolkning som gör alla Γ' 's sentenser sanna) så har också Γ en modell.

(Ett bevis för kompakthetssatsen bygger på Gödels fullständighetssats:

$$\Gamma \models p \Leftrightarrow \Gamma \vdash p.$$

Att Γ **inte** har någon modell är detsamma som att $\Gamma \models \perp$ (det betyder ju precis att $\perp$ är sann
i alla modeller för Γ (vilket den aldrig är)). Enligt fullständighetssatsen gäller det omm $\Gamma \vdash \perp$
(dvs att man kan härleda $\perp$ från Γ). Men varje härledning använder bara ett ändligt antal av
sentenserna i Γ , så $\Gamma \vdash \perp \Leftrightarrow \Gamma' \vdash \perp$ för någon ändlig $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Så

$$\Gamma \text{ har en modell} \Leftrightarrow \Gamma \not\models \perp \Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \perp \Leftrightarrow \Gamma' \not\vdash \perp \text{ för alla ändliga } \Gamma' \subseteq \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma' \not\models \perp \text{ för alla ändliga } \Gamma' \subseteq \Gamma \Leftrightarrow \text{Varje ändlig } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ har en modell.}$$

Slut på bevisskissen för kompakthetssatsen.)

(Ett annat och elegant bevis för kompakthetssatsen använder s.k. ultraprodukt.)

Vi återgår till Halls sats i fallet alla $|M_i| < \infty$ och $|I| = \infty$.

Inför (oändligt många) konstanter: c_i för $i \in I$ och d_r för $r \in \bigcup_{i \in I} M_i$.

Låt Γ bestå av alla sentenserna:

$$c_i \neq c_j \text{ för } i, j \in I, i \neq j,$$

$$c_i = d_{r_1} \vee c_i = d_{r_2} \vee \dots \vee c_i = d_{r_{|M_i|}} \text{ för } i \in I, M_i = \{r_1, r_2, \dots, r_{|M_i|}\}.$$

Om $\Gamma' \subseteq \Gamma$ är ändlig ingår bara ett ändligt antal av c_i :na i Γ' 's sentenser och den ändliga Halls
sats ger en modell för Γ' (ingående c_i tolkas som motsvarande m_i i en ändlig transversal).

Kompakthetssatsen ger en tolkning för hela Γ , vilken ger en transversal för det oändliga I (m_i
är ett $r \in M_i$ sådant att $c_i = d_r$ i tolkningen). Vi är klara.

Som synes räcker det att Halls villkor är uppfyllt för alla **ändliga** $H \subseteq I$.

(Att $|M_i| < \infty$ behövs för att $c_i = d_{r_1} \vee c_i = d_{r_2} \vee \dots \vee c_i = d_{r_{|M_i|}}$ skall vara en sentens.

För att visa Gödels fullständighetssats (eller konstruera ultraprodukt) krävs antaganden om
oändliga mängder, något liknande (men något svagare än) det s.k. urvalsaxiomet.)

2. En kortlek delas i 13 högar med 4 kort i varje.
När går det att dra olika valörer ur varje hög?

R: Alltid, G: Aldrig, B: Ibland

3. Om det är 2, 3, 4, 4, ..., 4, 4, 5, 6 kort i högarna,
när går det att dra olika valörer ur varje hög?

R: Alltid, G: Aldrig, B: Ibland

4. Om det är 1, 2, 3, 4, 4, ..., 4, 4, 5, 6, 7 kort i högarna,
när går det att dra olika valörer ur varje hög?

R: Alltid, G: Aldrig, B: Ibland

Svar:

2. R, ty k st högar innehåller $4k$ st kort, så minst k olika valörer.
Halls sats (med X mängden av högar och Y mängden av valörer).
3. R, ty k st högar innehåller minst $4k - 3$ st kort, så minst k olika valörer.
Halls sats.
4. B, ty om det t.ex. bara ligger ess i första och andra högarna går det inte att dra olika kort ur dem, men om det å andra sidan t.ex. ligger minst ett kort av valör i i hög nr i går det att dra dem.