

Svarsförslag för lappskrivning 3A, fredag 7 oktober 2016
i SF1630 Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är transitiv.

Lösning: $\mathcal{R}$ är transitiv om $((a\mathcal{R}b \text{ och } b\mathcal{R}c) \text{ medför } a\mathcal{R}c \text{ för alla } a, b, c \in X)$.

a1b. (1p) Sökt är antalet sätt att fördela 29 identiska bullar bland 38 personer, med högst en bulle per person.

Lösning: Det gäller antalet 29-delmängder (de som får en bulle) till en 38-mängd (personerna), så antalet är binomialtalet $\binom{38}{29} = \frac{38!}{29!(38-29)!} = \frac{38!}{9! \cdot 29!}$.

Svar: Bullarna kan fördelas på $\frac{38!}{9! \cdot 29!}$ (= 163 011 640) sätt.

a1c. (1p) Sökt är antalet funktioner $f : X \rightarrow Y$ som antar alla värden lika många gånger, då $|X| = 42$, $|Y| = 7$.

Lösning: Varje värde måste antas $\frac{42}{7} = 6$ gånger, så det sökta antalet ges av multinomialtalet $\binom{42}{6,6,6,6,6,6,6} = \frac{42!}{(6!)^7}$.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{42!}{(6!)^7}$ (= 14 007 180 988 362 844 601 443 040 716 800).

a1d. (1p) Sökt är antalet funktioner $f : \{3, 4, \dots, 15\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ som antar värdet c minst en gång.

Lösning: Det totala antalet funktioner från en 13-mängd ($|\{3, 4, \dots, 15\}| = 15 - 2 = 13$) till en 4-mängd är 4^{13} . Av dessa tar 3^{13} inte värdet c (13-mängd $\rightarrow$ 3-mängd), så det sökta antalet är $4^{13} - 3^{13}$ (additionsprincipen, det sökta $+ 3^{13} = 4^{13}$).

Svar: Det finns $4^{13} - 3^{13}$ (= 65 514 541) sådana funktioner.

a2. (4p) Sökt är det minsta möjliga antalet element i D , då $|A \cap B \cap C \cap D| = 3$, antalet gemensamma element i varje tre av mängderna är 7 och antalet gemensamma element i varje par av dem är 14.

Lösning: $|D|$ blir minimalt då D inte har några element som inte också ligger i minst en av de andra mängderna, så det sökta antalet är $|A' \cup B' \cup C'|$, där $X' = X \cap D$ för $X = A, B, C$.

Principen om inklusion/exklusion (sällprincipen) ger $|A' \cup B' \cup C'| = (|A'| + |B'| + |C'|) - (|A' \cap B'| + |B' \cap C'| + |C' \cap A'|) + |A' \cap B' \cap C'| = 3 \cdot 14 - 3 \cdot 7 + 3 = 24$.

Svar: Det minsta möjliga antalet element i D är 24.

b-versionen:

b1a. (1p) Sökt är definitionen av att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är reflexiv.

Lösning: $\mathcal{R}$ är reflexiv omm $a\mathcal{R}a$ är sann för alla $a \in X$.

b1b. (1p) Sökt är antalet sätt att fördela 36 identiska kolar bland 42 barn, med högst en kola per barn.

Lösning: Det gäller antalet 36-delmängder (de som får en kola) till en 42-mängd (barnen), så antalet är binomialtalet $\binom{42}{36} = \frac{42!}{36! \cdot (42-36)!} = \frac{42!}{6! \cdot 36!}$.

Svar: Kolorna kan fördelas på $\frac{42!}{6! \cdot 36!}$ ($= 5\,245\,786$) sätt.

b1c. (1p) Sökt är antalet funktioner $f : X \rightarrow Y$ som antar alla värden lika många gånger, då $|X| = 48$, $|Y| = 6$.

Lösning: Varje värde måste antas $\frac{48}{6} = 8$ gånger, så det sökta antalet ges av multinomialtalet $\binom{48}{8,8,8,8,8,8} = \frac{48!}{(8!)^6}$.

Svar: Det sökta antalet är $\frac{48!}{(8!)^6}$ ($= 2\,889\,253\,496\,242\,619\,386\,328\,267\,523\,990\,000$).

b1d. (1p) Sökt är antalet funktioner $f : \{7, 8, \dots, 14\} \rightarrow \{r, s, t, u, v\}$ som antar värdet s minst en gång.

Lösning: Det totala antalet funktioner från en 8-mängd ($|\{7, 8, \dots, 14\}| = 14 - 6 = 8$) till en 5-mängd är 5^8 . Av dessa tar 4^8 inte värdet s (8-mängd $\rightarrow$ 4-mängd), så det sökta antalet är $5^8 - 4^8$ (additionsprincipen, det sökta $+ 4^8 = 5^8$).

Svar: Det finns $5^8 - 4^8$ ($= 325\,089$) sådana funktioner.

b2. (4p) Sökt är det minsta möjliga antalet element i N , då $|K \cap L \cap M \cap N| = 2$, antalet gemensamma element i varje tre av mängderna är 8 och antalet gemensamma element i varje par av dem är 16.

Lösning: $|N|$ blir minimalt då N inte har några element som inte också ligger i minst en av de andra mängderna, så det sökta antalet är $|K' \cup L' \cup M'|$, där $X' = X \cap N$ för $X = K, L, M$.

Principen om inklusion/exklusion (sällprincipen) ger $|K' \cup L' \cup M'| = (|K'| + |L'| + |M'|) - (|K' \cap L'| + |L' \cap M'| + |M' \cap K'|) + |K' \cap L' \cap M'| = 3 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 2 = 26$.

Svar: Det minsta möjliga antalet element i N är 26.
