

Svarsförslag för lappskrivning 2B, torsdag 24 november 2016
i SF1630(/SF1631) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med x :s **bana** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X .

Lösning: x :s bana, Gx , är mängden av de element i X som x avbildas på av något $g \in G$. Alltså $Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$.

a1b. (1p) Vi skall ange vad som menas med x :s **stabilisator** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X .

Lösning: x :s stabilisator, G_x , är mängden (delgruppen till G) av de $g \in G$ som avbildar x på x . Alltså $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

a1c. (1p) Vi skall ange ett uttryck för antalet väsentligt olika (under en ändlig grupp G av rotationssymmetrier) färgningar av en polyeders sidoytor med ett givet antal färger.

Lösning: Det sökta antalet ges ("Burnsides lemma") av $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$, där $F(g)$ är mängden färgningar som är oförändrade då g roterar den så färgade polyedern.

a1d. (1p) Vi skall ange villkoren för att en ring $(R, +, \cdot)$ skall vara en kropp.

Lösning: Multiplikationen $\cdot$ skall vara kommutativ (dvs $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$) och varje $a \in R \setminus \{0\}$ skall ha en multiplikativ invers.
Alternativt uttryckt: $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ skall vara en abelsk grupp.

a2. Gruppen G verkar på mängden X , $|G| = 150$ och $|X| = 900$.
Antalen $g \in G$ med $g(x) = x$ är 1, 15 och 25 för 300 $x \in X$ vardera.
Vi söker antalet banor för G :s verkan på X .

Lösning: Att $g(x) = x$ bara för ett $g \in G$ betyder precis att $|G_x| = 1$, så $|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|} = 150$. Alla element i samma bana har samma $|G_x|$, så de första 300 elementen utgör 2 st banor ($\frac{300}{150}$).

P.s.s. fås att de 300 x :en med $|G_x| = 15$ utgör 30 st banor ($\frac{300}{10}$, $|G_x| = 10$) och de 300 med $|G_x| = 25$ utgör 50 st banor ($\frac{300}{6}$, $|G_x| = 6$).

Totala antalet banor blir $2 + 30 + 50 = 82$.

Svar: Antalet banor är 82.

(Alt. antalet banor är $\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = \frac{1}{150} (300 \cdot 1 + 300 \cdot 15 + 300 \cdot 25)$.)

b-versionen:

b1a. (1p) Vi skall ange vad som menas med x :s **stabilisator** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X .

Lösning: x :s stabilisator, G_x , är mängden (delgruppen till G) av de $g \in G$ som avbildar x på x . Alltså $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

b1b. (1p) Vi skall ange vad som menas med x :s **bana** då $x \in X$ och gruppen G verkar på X .

Lösning: x :s bana, Gx , är mängden av de element i X som x avbildas på av något $g \in G$. Alltså $Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$.

b1c. (1p) Vi skall ange ett uttryck för antalet väsentligt olika (under en ändlig grupp G av rotationssymmetrier) färgningar av en polyeders sidoytor med ett givet antal färger.

Lösning: Det sökta antalet ges ("Burnsides lemma") av $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$, där $F(g)$ är mängden färgningar som är oförändrade då g roterar den så färgade polyedern.

b1d. (1p) Vi skall ange villkoren för att en ring $(R, +, \cdot)$ skall vara en kropp.

Lösning: Multiplikationen $\cdot$ skall vara kommutativ (dvs $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$) och varje $a \in R \setminus \{0\}$ skall ha en multiplikativ invers. Alternativt uttryckt: $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ skall vara en abelsk grupp.

b2. Gruppen G verkar på mängden X , $|G| = 90$ och $|X| = 540$.
Antalen $g \in G$ med $g(x) = x$ är 1, 9 och 15 för 180 $x \in X$ vardera.
Vi söker antalet banor för G :s verkan på X .

Lösning: Att $g(x) = x$ bara för ett $g \in G$ betyder precis att $|G_x| = 1$, så $|Gx| = \frac{|G|}{|G_x|} = 90$. Alla element i samma bana har samma $|G_x|$, så de första 180 elementen utgör 2 st banor ($\frac{180}{90}$).

P.s.s. fås att de 180 x :en med $|G_x| = 9$ utgör 18 st banor ($\frac{180}{10}$, $|Gx| = \frac{90}{9} = 10$) och de 180 med $|G_x| = 15$ utgör 30 st banor ($\frac{180}{6}$, $|Gx| = \frac{90}{15} = 6$).

Totala antalet banor blir $2 + 18 + 30 = 50$.

Svar: Antalet banor är 50.

(Alt. antalet banor är $\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = \frac{1}{90} (180 \cdot 1 + 180 \cdot 9 + 180 \cdot 15)$.)
