

Svarsförslag för lappskrivning 1B, fredag 18 november 2016
i SF1630(/5B1203) Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) G är en grupp. Vi skall ange villkoret för att $z \in G$ skall ligga i $Z(G)$, gruppens **centrum**.

Lösning: $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ för alla } g \in G\}$, så villkoret är att $zg = gz$ för alla $g \in G$.

a1b. (1p) Vi skall definiera en **isomorfi** mellan två grupper $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$.

Lösning: En sådan isomorfi är en bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ som bevarar gruppstrukturen, dvs för alla $g, g' \in G_1$ gäller $\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g')$.

(Det följer att β tar identitets-element till identitets-element och invers till invers, $\beta(1_1) = 1_2$ och $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$.)

a1c. (1p) Vi skall definiera en **vänstersidoklass** till en delgrupp H till gruppen G .

Lösning: En vänstersidoklass till H i G är en mängd $gH = \{gh \mid h \in H\}$ för något $g \in G$.

a1d. (1p) $a, b, x \in G$, en grupp, och $x^2 = a$, $x^5 = b$. Vi söker x .

Lösning: Eftersom $x^2 = a$ är $x^6 = a^3$. $x^5 = b$ ger att $xb = a^3$, så $x = a^3b^{-1}$.
(Eftersom $b^2 = a^5$ kan svaret ha flera former, t.ex. $x = b^{-1}a^3, ba^{-2}, a^{-2}b$.)

a2. $(G, *)$ är en grupp, $|G| = 45$. Vi söker möjliga värden för (a, 2p) $o(g)$ då $g \in G$ och $g^6 \neq g^{36}$ och (b, 2p) $o(h)$ då $h \in G$ och $h^3 = h^{33}$.

Lösning: Eftersom $|G| = 45 = 3^2 \cdot 5$ är de enda möjliga ordningarna delarna till 45, dvs 1, 3, 5, 9, 15, 45 (elementens ordningar delar gruppens ordning (Lagrange)).

a. $g^6 \neq g^{36} \Leftrightarrow g^{30} \neq 1 \Leftrightarrow o(g) \nmid 30$. Tänkbara värden är alltså 9 och 45. Att de är möjliga ses av exemplet $(G, *) = (\mathbb{Z}_{45}, +)$, $g = 5, 1$.

b. $h^3 = h^{33} \Leftrightarrow h^{30} = 1 \Leftrightarrow o(h) \mid 30$. Tänkbara värden är alltså 1, 3, 5, 15. Att de är möjliga ses av exemplet $(G, *) = (\mathbb{Z}_{45}, +)$, $h = 0, 15, 9, 3$.

Svar a: 9 och 45 är möjliga, b: 1, 3, 5 och 15 är möjliga.

b-versionen:

b1a. (1p) Vi skall definiera en **isomorfi** mellan två grupper $(G_1, *)$ och $(G_2, \circ)$.

Lösning: En sådan isomorfi är en bijektion $\beta : G_1 \rightarrow G_2$ som bevarar gruppstrukturen, dvs för alla $g, g' \in G_1$ gäller $\beta(g * g') = \beta(g) \circ \beta(g')$.

(Det följer att β tar identitetselement till identitetselement och invers till invers, $\beta(1_1) = 1_2$ och $\beta(g^{-1}) = \beta(g)^{-1}$.)

b1b. (1p) G är en grupp. Vi skall ange villkoret för att $z \in G$ skall ligga i $Z(G)$, gruppens **centrum**.

Lösning: $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ för alla } g \in G\}$, så villkoret är att $zg = gz$ för alla $g \in G$.

b1c. (1p) $a, b, x \in G$, en grupp, och $x^5 = a$, $x^3 = b$. Vi söker x .

Lösning: Eftersom $x^3 = b$ är $x^6 = b^2$. $x^5 = a$ ger att $xa = b^2$, så $x = b^2a^{-1}$.
(Eftersom $a^3 = b^5$ kan svaret ha flera former, t.ex. $x = a^{-1}b^2, a^2b^{-3}, b^{-3}a^2$.)

b1d. (1p) Vi skall definiera en **högersidoklass** till en delgrupp H till gruppen G .

Lösning: En högersidoklass till H i G är en mängd $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ för något $g \in G$.

b2. $(G, *)$ är en grupp, $|G| = 75$. Vi söker möjliga värden för (a, 2p) $o(g)$ då $g \in G$ och $g^5 \neq g^{55}$ och (b, 2p) $o(h)$ då $h \in G$ och $h^2 = h^{22}$.

Lösning: Eftersom $|G| = 75 = 3 \cdot 5^2$ är de enda möjliga ordningarna delarna till 75, dvs 1, 3, 5, 15, 25, 75 (elementens ordningar delar gruppens ordning (Lagrange)).

a. $g^5 \neq g^{55} \Leftrightarrow g^{50} \neq 1 \Leftrightarrow o(g) \nmid 50$. Tänkbara värden är alltså 3, 15 och 75. Att de är möjliga ses av exemplet $(G, *) = (\mathbb{Z}_{75}, +)$, $g = 25, 5, 1$.

b. $h^2 = h^{22} \Leftrightarrow h^{20} = 1 \Leftrightarrow o(h) \mid 20$. Tänkbara värden är alltså 1 och 5. Att de är möjliga ses av exemplet $(G, *) = (\mathbb{Z}_{75}, +)$, $h = 0, 15$.

Svar a: 3, 15 och 75 är möjliga, b: 1 och 5 är möjliga.
