

Svarsförslag för lappskrivning 1A, version a och b,
to 15 september 2016, i SF1630 Diskret matematik, för D (m.fl.)

(Tryckfel kan förekomma.)

a-versionen (b-versionen på andra sidan):

a1a. (1p) Sökt är definitionen av att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är isomorfa.

Lösning: De är isomorfa om det finns en bijektion (dvs en funktion som är 1-1 och på) $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.

a1b. (1p) Grafen $G = (V, E)$ har 5 hörn med valens 2, 5 med valens 3, 3 med valens 4 och 1 med valens 5 (och inga andra hörn). Sökt är antalet kanter i G , $|E|$.

Lösning: I varje graf är summan av valenserna, $\sum_{x \in V} \delta(x)$, lika med $2|E|$, så i vårt fall är $|E| = \frac{1}{2}(5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5) = \frac{42}{2} = 21$.

Svar: Antalet kanter i grafen är 21.

a1c. (1p) Sökt är definitionen av det kromatiska talet, $\chi(G)$, för en graf G .

Lösning: $\chi(G)$ är det minsta antalet färger i en hörnfärgning av G , dvs en färgläggning av hörnen så att de två hörnen i varje kant har olika färger.

a1d. (1p) En graf $G = (V, E)$ med $|V| = 24$ och $|E| = 27$ ritas utan korsande kanter på ytan av en sfär. Sfärens yta delas då in i 8 områden. Sökt är antalet komponenter i G .

Lösning: Eftersom grafen är plan (utan kantkorsningar på en sfäryta), uppfyller $v = |V|$, $e = |E|$, $r = 8$ (antalet områden) och c (antalet komponenter) generaliseringen av Eulers polyederformel $v - e + r - c = 1$, så $c = v - e + r - 1 = 24 - 27 + 8 - 1 = 4$.

Svar: Grafen har 4 komponenter.

a2. (4p) Vi söker antalet kanter, $|E|$, i en graf $G = (V, E)$ med 7 komponenter och 962 hörn, som är sådan att det går att ta bort två kanter utan att antalet komponenter ökar, men inte tre.

Lösning: Då man tagit bort två kanter utan att antalet komponenter ökat, har den återstående grafen, G' säg, inga cykler (om man tar bort en kant ur en cykel ökar inte antalet komponenter). Varje komponent i G' är alltså ett träd och har en kant mindre än hörn. Det betyder att G' har $962 - 7 = 955$ kanter. G har två fler, 957.

Svar: G har 957 kanter.

b-versionen:

b1a. (1p) Grafen $G = (V, E)$ har 1 hörn med valens 1, 1 med valens 2, 10 med valens 3, 2 med valens 4 och 1 med valens 5 (och inga andra hörn). Sökt är antalet kanter i G , $|E|$.

Lösning: I varje graf är summan av valenserna, $\sum_{x \in V} \delta(x)$, lika med $2|E|$, så i vårt fall är $|E| = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5) = \frac{46}{2} = 23$.

Svar: Antalet kanter i grafen är 23.

b1b. (1p) Sökt är definitionen av att graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är isomorfa.

Lösning: De är isomorfa om det finns en bijektion (dvs en funktion som är 1-1 och på) $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.

b1c. (1p) En graf $G = (V, E)$ med $|V| = 18$ och $|E| = 21$ ritas utan korsande kanter på ytan av en sfär. Sfärens yta delas då in i 7 områden. Sökt är antalet komponenter i G .

Lösning: Eftersom grafen är plan (utan kantkorsningar på en sfäryta), uppfyller $v = |V|$, $e = |E|$, $r = 7$ (antalet områden) och c (antalet komponenter) generaliseringen av Eulers polyederformel $v - e + r - c = 1$, så $c = v - e + r - 1 = 18 - 21 + 7 - 1 = 3$.

Svar: Grafen har 3 komponenter.

b1d. (1p) Sökt är definitionen av det kromatiska talet, $\chi(G)$, för en graf G .

Lösning: $\chi(G)$ är det minsta antalet färger i en hörnfärgning av G , dvs en färgläggning av hörnen så att de två hörnen i varje kant har olika färger.

b2. (4p) Vi söker antalet kanter, $|E|$, i en graf $G = (V, E)$ med 11 komponenter och 748 hörn, som är sådan att det går att ta bort fyra kanter utan att antalet komponenter ökar, men inte fem.

Lösning: Då man tagit bort fyra kanter utan att antalet komponenter ökat, har den återstående grafen, G' säg, inga cykler (om man tar bort en kant ur en cykel ökar inte antalet komponenter). Varje komponent i G' är alltså ett träd och har en kant mindre än hörn. Det betyder att G' har $748 - 11 = 737$ kanter. G har fyra fler, 741.

Svar: G har 741 kanter.
